25,895/B

Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
Wellcome Library

https://archive.org/details/b29337823

Allgemeine Theorie

der

Fernröhre und Mikroskope

zugleich als ein

Lehrbuch

der elementaren Optik.

Von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt und der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle und Marburg.

> Les progrès de l'Astronomie dépendent de ces trois choses: la mesure du temps, celle des angles, et la perfection des instrumens d'optique. Les deux premières ne laissent maintenant presque rien à désirer; c'est donc principalement vers la troisième, que les encouragemens doivent être dirigés.
>
> *Laplace: Exposition du système du monde T. II. p. 408.*

Mit einer Figurentafel.

Leipzig, 1846.

Bei E. B. Schwickert.

75742

Optische

Untersuchungen.

Von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt und der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle und Marburg.

> Les progrès de l'Astronomie dépendent de ces trois choses: la mesure du temps, celle des angles, et la perfection des instrumens d'optique. Les deux premières ne laissent maintenant presque rien à désirer; c'est donc principalement vers la troisième, que les encouragemens doivent être dirigés.
>
> *Laplace: Exposition du système du monde T. II. p. 408.*

Erster Theil.

Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope.

Mit einer Figurentafel.

Leipzig, 1846.

Bei E. B. Schwickert.

WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

Vorrede.

Die theoretische Optik hat erst in neuester Zeit einige Fortschritte gemacht, welche wirklich als solche bezeichnet zu werden verdienen. Denn noch vor einer geringen Reihe von Jahren stand dieselbe fast ganz auf demselben Standpunkte, auf welchem Euler und Klügel sie gelassen. Auch sind die Klagen der ausübenden Künstler über die Mangelhaftigkeit der ältern Theorie hinreichend bekannt; und wenn man die vielen Vernachlässigungen, welche sich dieselbe gestattete, sorgfältig in Ueberlegung nimmt, so kann man in diese Klagen nur einstimmen, und muss es natürlich finden, dass in dieser ältern Theorie die Praxis nicht hinreichende Unterstützung finden konnte, und sich mehr einem blossen Probiren zu überlassen genöthigt war, wenn etwas Tüchtiges zu Tage gefördert werden sollte. Am meisten ist die Praxis noch durch J. Herschel's im Jahre 1821 erschienene bekannte Abhandlung über zweifache achromatische Objective gefördert worden, und die besseren Künstler halten sich jetzt um so mehr mit Recht ganz an dieselbe, weil nach Stampfer's sorgfältigen Messungen sich auch Fraunhofer's alle früheren Leistungen übertreffende Gläser fast ganz genau an dieselbe anschliessen; aber auch bei dieser Theorie werden die Dicken der Linsen noch ganz vernachlässigt, und das derselben zum Grunde liegende Princip scheint in der That, wenigstens in theoretischer Rücksicht, nicht das beste zu sein, wie auch schon Brandes in dem Artikel Linsenglas in der neuen Ausgabe des Geh-

ler'schen physikalischen Wörterbuchs mit Recht bemerkt hat. Ueber dreifache achromatische Objective, welche nach den Erfolgen, die ein so ausgezeichneter Künstler wie Peter Dollond sich von denselben versprach, wenigstens nicht geradezu und ohne alle genauere theoretische Untersuchung zu verwerfen zu sein scheinen, ist mit Ausnahme einer Abhandlung von Oriani, die aber nur einen sehr speciellen Fall in's Auge fasst und überhaupt wenig für die Praxis Erspriessliches zu leisten scheint, seit Euler's und Klügel's Zeiten gar keine einigermassen durchgeführte theoretische Untersuchung bekannt geworden.

In neuester Zeit haben Piola, Möbius, Clausen, Gauss, Bessel, Encke, Biot, Schleiermacher, Petzval sehr verdienstliche theoretische Arbeiten zur weiteren Ausbildung der Optik geliefert, der letztere Schriftsteller jedoch bis jetzt mehr angedeutet als ausgeführt. Dass aber dessenungeachtet die Theorie noch nicht so weit ausgebildet ist, dass es jetzt an der Zeit wäre, ein neues ausführliches System der Dioptrik etwa wie Euler's grosses Werk oder Klügel's Analytische Dioptrik zu verfassen, was Santini schon im Jahre 1828 und bald darauf J. J. v. Littrow im Jahre 1830 auf eine zu damaliger Zeit jedenfalls sehr verdienstliche Weise versuchten: dafür scheint mir den augenfälligsten Beweis das neueste ausführliche Werk über diesen Gegenstand von Schleiermacher zu liefern, bei welchem man zwar das rühmliche Streben seines verdienten Verfassers dankbar anerkennen muss, aber schon bei dem blossen Anblick der oft sehr complicirten, meistens eine Unzahl von Substitutionen erfordernden, nur sehr selten mit einer gewissen Gesetzmässigkeit fortschreitenden Formeln, sich zu sagen gezwungen sein wird, dass hinter denselben wohl einfachere Gesetze versteckt sein müssen, die noch auf ihre weitere Entwickelung warten.

Meinen früheren Vorsatz, ein ausführliches System der

Dioptrik mit Einschluss der Katoptrik zu verfassen, habe ich daher für's Erste ganz aufgegeben, will dagegen versuchen, durch einzelne mit einer gewissen Vollständigkeit durchgeführte Untersuchungen zur weiteren Ausbildung der theoretischen Optik Einiges beizutragen. Diese optischen Untersuchungen sollen nach und nach in einzelnen Theilen von so geringer Stärke, wie etwa der vorliegende, erscheinen, und ein jeder soll in gewisser Rücksicht ein in sich abgeschlossenes Ganzes bilden. Was der Inhalt aller dieser einzelnen Theile, und wie gross ihre Anzahl sein wird, lässt sich jetzt noch nicht mit Gewissheit bestimmen, und ich kann darüber dem Publikum für's Erste nur Folgendes in der Kürze berichten.

Der vorliegende erste Theil enthält, wie sein besonderer Titel besagt, die allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope, was man aber in dem folgenden Sinne zu nehmen hat. Ich betrachte nämlich in diesem ersten Theile die von Spiegel- und Linsen-Systemen hervorgebrachten Bilder strahlender Punkte, ohne alle Rücksicht auf die sogenannten Abweichungen, als gewisse Gränzen, denen sich die Punkte, in welchen sich die von leuchtenden Punkten ausgehenden Strahlen nach an Spiegeln oder Linsen erlittenen Zurückwerfungen oder Brechungen schneiden, unter gewissen Bedingungen nähern, und gelange dadurch zuvörderst zu einem bestimmten geometrischen Begriffe des Bildes eines strahlenden Punktes und zu völlig genauen Formeln zur Bestimmung der Lage desselben, aus denen dann bequemere Näherungsformeln abgeleitet werden, bei deren möglichster Vereinfachung mir der hier zuerst eingeführte Begriff des Modulus eines Spiegels oder einer Linse vortreffliche Dienste geleistet hat. Diese Formeln werden hierauf zur Entwickelung der allgemeinen Theorie der Fernröhre und Mikroskope, immer aber, dem in diesem ersten Theile nun einmal festgehaltenen Princip gemäss, ohne alle Berücksichtigung der sogenannten Abweichungen, angewandt, und ein Paar

der einfachsten Fälle als Beispiele betrachtet, die in's Einzelne gehende Betrachtung der verschiedenen Arten optischer Instrumente aber späteren speciellen Untersuchungen überlassen, indem dieselbe für jetzt nicht meinem Zwecke lag. Das erste, die Grundgesetze überschriebene, Kapitel hat keineswegs den Zweck, eine Anleitung zur wirklichen Bestimmung der Brechungsverhältnisse zu geben, und durfte hier nur deshalb nicht wegbleiben, weil dieser erste Theil zugleich als ein Lehrbuch der elementaren Optik dienen soll. Der erste der beiden Anhänge ist namentlich seines geometrischen Interesses wegen beigefügt worden. In dem zweiten Anhange habe ich eine ausführlichere Untersuchung über die Reflexion bei den Kegelschnitten geliefert, weil elliptische Spiegel in neuerer Zeit z. B. von Amici nicht ohne glücklichen Erfolg bei den Spiegel-Mikroskopen in Anwendung gebracht, und nur erst ganz neuerlich dazu wiederholt von Doppler dringend empfohlen worden sind, eine frühere einigermassen genügende Bearbeitung dieses interessanten Gegenstandes mir aber nicht bekannt geworden ist. Auch glaube ich, dass die Methode, mittelst welcher ich in diesem Anhange die Lage der Bilder mit Hülfe der aus der Differentialrechnung bekannten Regel zur Bestimmung der Werthe der in gewissen Fällen unbestimmt zu sein scheinenden gebrochenen Functionen ermittelt habe, wohl einige Beachtung verdient.

Der zweite Theil, welcher die Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre enthält, wird diesem ersten auf dem Fusse folgen. In demselben betrachte ich zweifache und dreifache achromatische Objective, richte mein Augenmerk aber zunächst vorzüglich nur auf die Vervollkommnung der ältern Theorien, was ich deshalb für wichtig halte, weil sich nicht leugnen lässt, dass es den Künstlern z. B. durch das Anschliessen an die doch auch noch an manchen Mängeln leidende Herschel'sche Theorie gelungen ist, schon sehr Vieles leistende Objective zu Stande zu bringen, und sich daher von

der Vervollkommnung der Theorie auch noch erhöhete praktische Leistungen mit Recht erwarten lassen, weshalb ich auch durchaus der Meinung bin, dass man der praktischen Optik bei der jetzigen Lage der Sache zunächst am meisten zu nützen hoffen kann, wenn man die älteren Theorien weiter auszubilden, und vorläufig nicht ganz neue Wege zu betreten sucht. Ich habe daher, ohne mir insbesondere irgendwo eine Vernachlässigung der Dicken der Linsen zu gestatten, auf die für den Bau achromatischer Objective aufgestellten Principe von Euler, Klügel, Littrow, Barlow, Herschel, Gauss und auf einige andere von mir selbst angegebene Principe für zweifache und dreifache achromatische Objective strenge theoretische Entwickelungen gegründet, und dieselben überall so weit fortgeführt, dass die Gleichungen, in denen die Bedingungen des Problems ausgedrückt sind, vollständig entwickelt zur numerischen Auflösung vorliegen. Numerische Rechnungen sind in diesem zweiten Theile, über welchen ich übrigens in seiner besonderen Vorrede noch mehr als mir hier der Raum gestattet zu sagen haben werde, nur an ein Paar Orten bloss als Beispiele mitgetheilt worden, weil ich die Ueberzeugung gewonnen habe, dass die vollständige Mittheilung derselben, welche nöthig ist, wenn diese Rechnungen ihrem eigentlichen Zwecke, die Grundlage für ein sicheres Urtheil über die grössere oder geringere Vollkommenheit der nach verschiedenen Principen gebau'ten achromatischen Objective zu bilden, und zu ganz unzweideutigen Resultaten hierüber zu führen, gehörig entsprechen sollen, eine besondere Abtheilung dieses Werks für sich in Anspruch nehmen wird, welche ich auch dem zweiten Theile in möglichst kurzer Frist werde folgen lassen können, weil ich mich der Hoffnung hingeben darf, dass ich mich bei der vollständigen Durchführung dieser beschwerlichen Rechnungen einiger Unterstützung zu erfreuen haben werde. Auch soll in dieser Abtheilung darauf Bedacht genommen werden, die Rechnungen, wo es irgend thunlich ist, durch Tafeln

zu erleichtern, wodurch Barlow bekanntlich die Resultate der Herschel'schen Theorie den Künstlern so sehr zur Anwendung empfohlen hat.

In gleich vollständiger Weise soll späterhin die Theorie der Oculare bearbeitet werden; eine besondere Abtheilung denke ich der Entwickelung der verschiedenen für die Praxis so wichtigen Methoden zur Bestimmung der Brechungsverhältnisse, der Brennweiten und Krümmungshalbmesser der Spiegel und Linsen, der Vergrösserung der Fernröhre und Mikroskope, u. s. w. zu widmen; und endlich hoffe ich noch, die älteren Wege völlig verlassend, die ganze Theorie der optischen Instrumente aus weit umfassenderen Gesichtspunkten, als dies überhaupt bis jetzt geschehen ist, darzustellen, und dabei zugleich verschiedene Punkte zur Sprache zu bringen und einer genauen Erörterung zu unterwerfen, auf welche von einigen neueren Schriftstellern, wie z.B. von Gauss, Schleiermacher und Petzval, mit Recht die Aufmerksamkeit hingelenkt worden ist. Zunächst schien mir, was ich hier absichtlich wiederholt bemerke, insbesondere eine Vervollkommnung der Theorie der achromatischen Objective nach den bisherigen Ansichten, so wie ich dieselbe in dem zweiten Theile zu geben versucht habe, Bedürfniss zu sein und den Anforderungen, welche die Praxis an die Theorie zu machen berechtigt ist, für jetzt am meisten zu entsprechen.

Ob es mir späterhin möglich sein wird, auch die physikalische Theorie des Lichts, wie es allerdings mein Wunsch ist, in den Kreis dieser optischen Untersuchung zu ziehen, muss ich für jetzt noch dahin gestellt sein lassen, und nur die Zeit und die Umstände können darüber entscheiden.

Greifswald,
im Februar 1846.

Der Verfasser.

Inhalt.

	Seite
Erstes Kapitel. Die Grundgesetze	3
Zweites Kapitel. Die Grundformeln	17
Drittes Kapitel. Von den Kugelflächensystemen	87
Viertes Kapitel. Von den Spiegel- und Linsen-Systemen	110
Fünftes Kapitel. Von zwei eine gemeinschaftliche Axe habenden Spiegel- und Linsen-Systemen im Allgemeinen	134
Sechstes Kapitel. Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope	169
Erster Anhang. Von den einem gegebenen Halbkreise oder einer gegebenen Halbkugelfläche entsprechenden Bildern gegebener Curven	209
Zweiter Anhang. Ueber die Reflexion bei den Kegelschnitten	222

Allgemeine Theorie

der

Fernröhre und Mikroskope.

Erstes Kapitel.

Die Grundgesetze.

§. 1.

Wenn das Auge von einem Licht aussendenden Punkte bloss durch ein und denselben homogenen durchsichtigen, d. h. dem Lichte einen ungehinderten Durchgang verstattenden, Körper, oder, wie man zu sagen pflegt, bloss durch ein und dasselbe homogene durchsichtige Mittel oder Medium getrennt ist; so bleibt dieser Punkt, wie die gemeinsten Erfahrungen lehren, dem Auge nur so lange sichtbar, als die gerade Linie, welche den leuchtenden Punkt mit dem Augensterne verbindet, durch keinen undurchsichtigen, d. h. dem Lichte einen ungehinderten Durchgang nicht verstattenden, Körper unterbrochen wird. Wenn man ferner durch ein möglichst kleines Loch in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers in das letztere Sonnenlicht treten lässt, so bemerkt man auf das Deutlichste, dass der durch die stetige Folge der erleuchteten, in der das Zimmer erfüllenden Luft schwimmenden Staubtheilchen bezeichnete Weg des eintretenden Lichts eine gerade Linie ist. Diese und ähnliche sich leicht darbietende Erscheinungen führen uns unmittelbar zu dem folgenden ersten, allen unseren späteren Untersuchungen zur hauptsächlichsten Grundlage dienenden Grundgesetze der ganzen Lehre vom Lichte oder der Optik im weitesten Sinne des Worts:

Erstes Grundgesetz der Optik. Die Wege des in einem und demselben homogenen durchsichtigen Körper, Mittel oder Medium sich bewegenden Lichts sind jederzeit gerade Linien, welche im Allgemeinen mit dem Namen Lichtstrahlen belegt werden.

§. 2.

Wenn man einen durch eine möglichst kleine Oeffnung in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers in das letztere tretenden

Lichtstrahl auf eine möglichst glatt polirte ebene Fläche fallen lässt, so findet man, dass der geradlinige Weg des Strahls unterbrochen wird, und derselbe aus zwei auf derselben Seite der in Rede stehenden ebenen Fläche liegenden Strahlen, welche aber eigentlich nur als zwei Theile eines und desselben Strahls zu betrachten sind, zu bestehen scheint, die in dem Punkte, in welchem die polirte Ebene von dem auf sie fallenden Strahle getroffen wird, einen Winkel mit einander einschliessen. Diese Erscheinung nennt man die Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts, und jede möglichst glatt polirte ebene oder krumme Fläche wird ein Spiegel genannt, wobei man, was für das Folgende wichtig ist, nicht ausser Acht zu lassen hat, dass man bei einem krummen Spiegel offenbar immer bloss den unendlich kleinen Theil oder das unendlich kleine Element desselben in der Nähe des Punktes, in welchem der Spiegel von dem auf ihn fallenden Strahle getroffen wird, oder, da ein jedes solches unendlich kleines Element als eben betrachtet werden kann, die den Spiegel in dem in Rede stehenden Punkte berührende Ebene als die spiegelnde Fläche zu betrachten braucht, wodurch also die Betrachtung eines jeden krummen Spiegels unmittelbar auf die Betrachtung eines ebenen Spiegels reducirt wird. Der Theil des Strahles von seinem Ausgangspunkte bis zu dem Punkte, in welchem der Spiegel von dem Strahle getroffen wird, heisst der einfallende Strahl, und der in Rede stehende Punkt wird der Einfallspunkt genannt; den anderen von dem Einfallspunkte ausgehenden Theil des Strahls nennt man den zurückgeworfenen Strahl, oder auch den reflectirten Strahl. Das in dem Einfallspunkte auf den Spiegel auf der nämlichen Seite desselben, auf welcher der einfallende und der zurückgeworfene Strahl liegen, errichtete Perpendikel heisst das Einfallsloth, und die beiden 90° nicht übersteigenden Winkel, welche der einfallende und zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslothe einschliessen, werden respective der Einfallswinkel und der Zurückwerfungswinkel oder Reflexionswinkel genannt.

Um die Gesetze der Zurückwerfung des Lichts auf eine möglichst einfache Weise durch Versuche zu erforschen, nehme man eine etwa die Form eines Rechtecks habende ebene Fläche *ABCD* *(Fig. 1.)*, auf welcher um einen Punkt *O* in der Seite *AB* als Mittelpunkt ein etwa in Viertelgrade eingetheilter Halbkreis beschrieben ist, und bringe diese Ebene in eine solche Lage, dass die

Fig. 1.

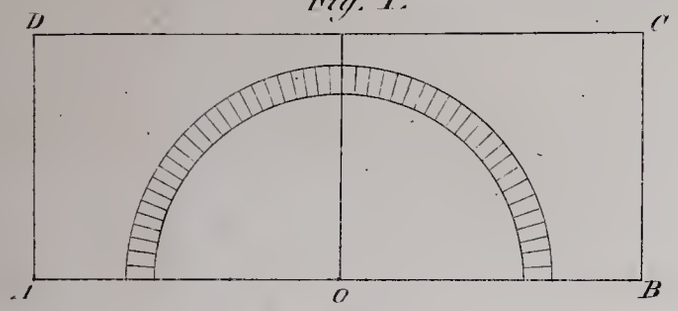

Fig. 2.

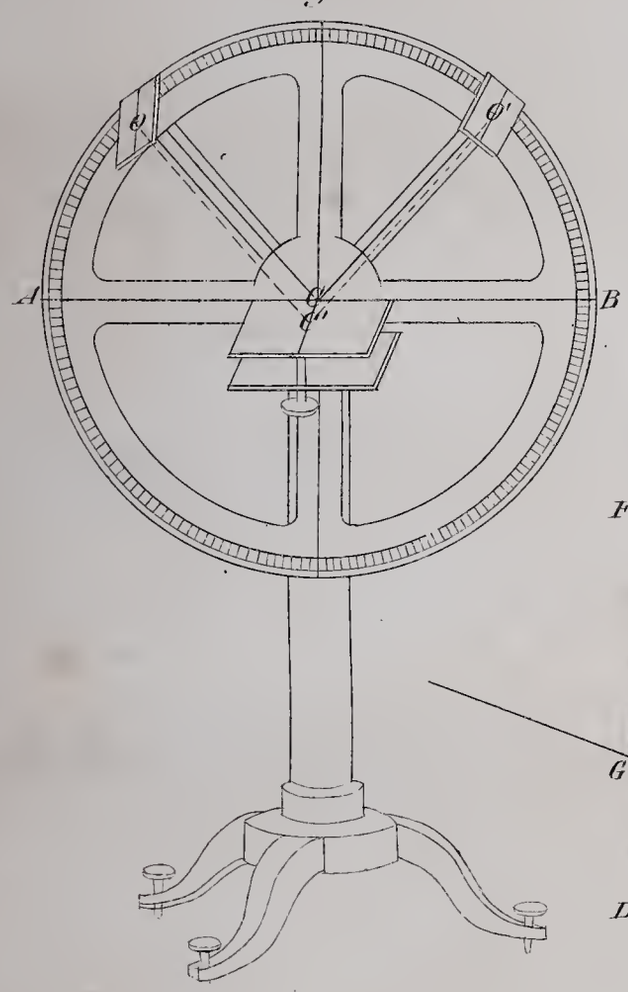

Fig. 4.

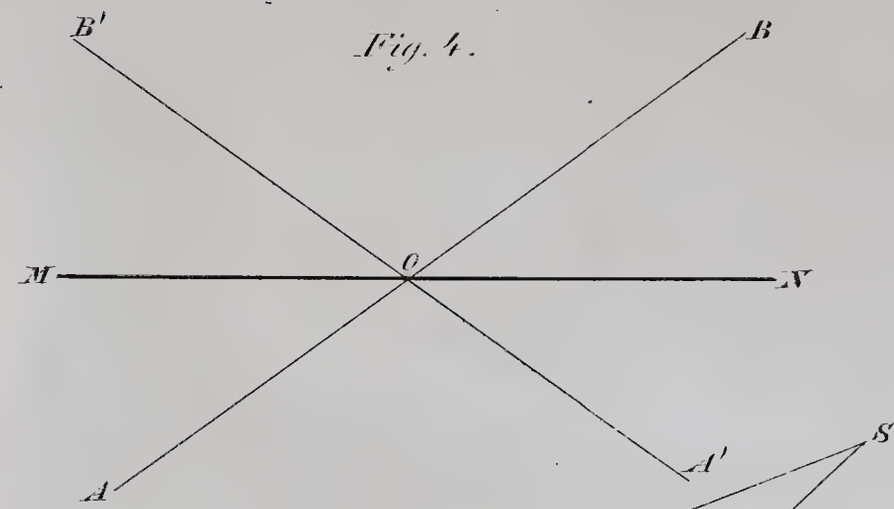

Fig. 3.

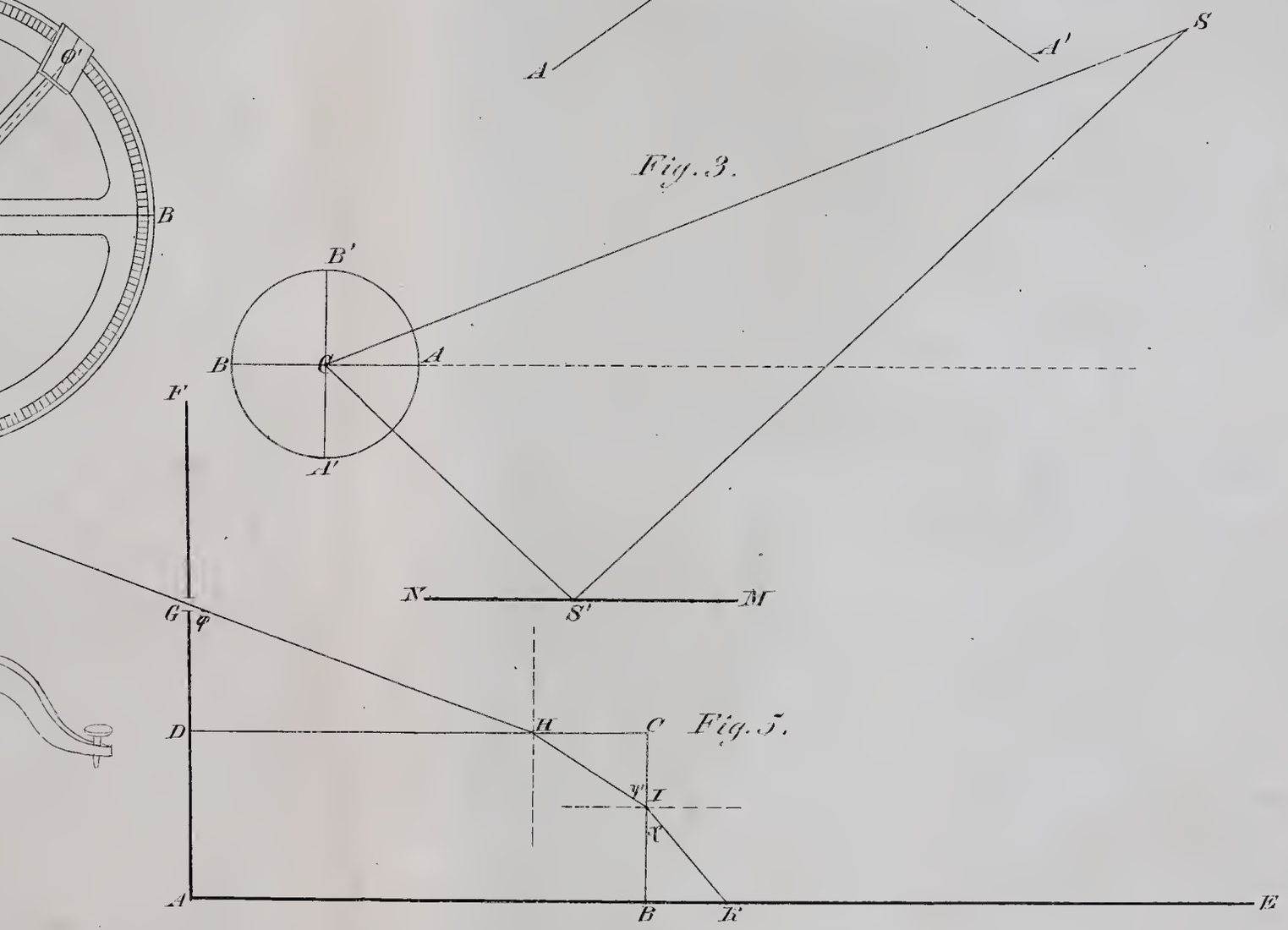

Fig. 5.

Seite AB derselben in die bei dem in einem verfinsterten Zimmer anzustellenden Versuche gebrauchte spiegelnde Ebene, der Mittelpunkt O des eingetheilten Halbkreises mit dem Einfallspunkte zusammen fällt, und der einfallende und zurückgeworfene Strahl auf der Ebene $ABCD$ als helle gerade Linien sich darstellen. Untersucht man unter diesen Voraussetzungen die Lage der Ebene $ABCD$ gegen die spiegelnde Ebene etwa nur mit Hülfe eines gewöhnlichen rechtwinkligen Dreiecks von Holz, so wird man allemal, unter welchen Verhältnissen man den Versuch auch anstellen mag, finden, dass die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen, und folglich der einfallende Strahl, das Einfallsloth und der zurückgeworfene Strahl jederzeit in einer und derselben Ebene liegen. Misst man aber ferner an dem eingetheilten Kreise den Einfallswinkel und den Zurückwerfungswinkel oder Reflexionswinkel, so wird sich bei allen Versuchen auf völlig unzweideutige Weise die Gleichheit dieser beiden Winkel ergeben, woraus, weil der einfallende und der zurückgeworfene Strahl wenigstens im Allgemeinen nicht zusammenfallen und immer auf einer und derselben Seite der spiegelnden Ebene liegen, zugleich auch von selbst folgt, dass das Einfallsloth immer zwischen dem einfallenden und dem zurückgeworfenen Strahle liegt. Hiernach lässt sich nun das Gesetz der Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts als das zweite Grundgesetz der Optik auf folgende Art aussprechen:

Zweites Grundgesetz der Optik. Bei der Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts liegen der einfallende und der zurückgeworfene Strahl jederzeit auf einer und derselben Seite der spiegelnden Fläche; in der durch diese beiden Strahlen bestimmten Ebene liegt zwischen denselben auch das Einfallsloth, und der Einfallswinkel ist immer dem Zurückwerfungswinkel oder dem Reflexionswinkel gleich.

Der Theil der Optik, welcher sich, von diesem zweiten Grundgesetze ausgehend, mit der genauen Entwickelung aller der Gesetze beschäftigt, nach welchen die von der Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts hervorgebrachten Erscheinungen erfolgen, heisst die Katoptrik.

Die Versuche, welche uns vorher zu dem obigen Grundgesetze der Zurückwerfung des Lichts geführt haben, sind ziemlich roh, aber absichtlich von uns gewählt worden, weil der durch sie dargebotene Weg jedenfalls der leichteste und unmittelbarste

Weg ist, auf welchem man zu diesem Gesetze gelangen kann. Wir wollen nun aber noch andere Mittel angeben, durch welche man denselben Zweck auf genauere Weise zu erreichen im Stande ist, auch ohne eines verfinsterten Zimmers zu bedürfen, welches aber, wie wir uns späterhin noch zu überzeugen Gelegenheit haben werden, für viele optische Versuche ein sehr wichtiges, oft unentbehrliches Hülfsmittel ist.

Der berühmte Optiker Cauchoix hat folgenden in *Fig.* 2. abgebildeten Apparat zur Erläuterung der obigen Gesetze der Zurückwerfung des Lichts angegeben, welcher auch bei anderen Untersuchungen zuweilen gute Dienste leisten kann. An einer auf einem mit drei Stellschrauben versehenen Dreifusse aufgestellten Säule ist ein eingetheilter Kreis befestigt, dessen Ebene sich nach einem Bleilothe mit Hülfe der drei Stellschrauben vertikal stellen lässt. In dem Mittelpunkte C dieses Kreises ist in der Richtung dessen durch den Nullpunkt der Theilung gehenden Durchmessers AB ein ebener Spiegel angebracht, welcher sich, nachdem der Kreis vertikal gestellt worden, durch theils an ihm selbst, theils an dem Kreise angebrachte Schrauben mit Hülfe eines Niveaus genau horizontal, also senkrecht gegen die Ebene des vertikalen Kreises stellen lässt. An dem Umfange des Kreises lassen sich zwei auf seiner Ebene senkrecht stehende Läufer verschieben, in denen genau in gleicher Entfernung von der Ebene des Kreises die kleinen Löcher O und O' angebracht sind, und auf dem Spiegel ist ein Metallstreifen befestigt, dessen eine geradlinige scharfe Kante vom Mittelpunkte des Kreises ausgeht und auf dem Durchmesser AB senkrecht steht. Auf dieser Kante des Metallstreifens ist eine Marke C' angebracht, die vom Mittelpunkte C des Kreises genau eben so weit entfernt ist, wie von der Ebene desselben die Löcher O und O', von denen aus auch noch auf den Läufern zwei auf der Ebene des Kreises senkrecht stehende gerade Linien gezogen werden müssen, welche zur Angabe der den Löchern O und O' als deren Projectionen auf der Ebene des Kreises entsprechenden Punkte der Theilung des Limbus dienen. Führt man nun, nachdem die Ebene des Kreises genau vertikal, die Ebene des Spiegels genau horizontal gestellt worden ist, den Läufer O auf einen beliebigen Punkt der Theilung, stellt ihn in dieser Lage fest, verschiebt dann den Läufer O' so lange, bis man, durch das Loch O' sehend, das Loch O durch Reflexion von dem Spiegel erblickt, und stellt den Läufer O' in dieser Lage fest; so wird man immer

1) das Loch O genau auf der oben durch C' bezeichneten Marke wahrnehmen, so dass das Bild des Lochs O mit der Marke C' zusammenzufallen scheint; und wenn man 2) die beiden spitzen Winkel auf dem eingetheilten Limbus des Kreises abliest, welche die Projectionen der Linien $C'O$ und $C'O'$ auf der Ebene des Kreises mit dem Durchmesser AB einschliessen, so wird man jederzeit finden, dass diese beiden Winkel einander gleich sind. Dass hierin die obigen Gesetze der Zurückwerfung des Lichts vollständig ausgesprochen sind, geht aus der vorher beschriebenen Einrichtung des Instruments ohne weitere Erläuterung ganz von selbst hervor.

Eine andere Methode, sich von der Richtigkeit dieser Gesetze zu versichern, kommt auf das Folgende zurück. Eine mit den nöthigen Stellschrauben versehene spiegelnde Ebene MN *(Fig. 3.)* bringe man mit Hülfe eines Niveaus genau in eine horizontale Lage, und stelle die Ebene eines eingetheilten Kreises, um dessen Mittelpunkt C eine Alhidade beweglich ist, mit Hülfe der dazu nöthigen Stellschrauben und eines Lothes so, dass der auf dem durch den Nullpunkt A der Theilung gehenden Durchmesser AB senkrecht stehende Durchmesser $A'B'$ genau vertikal, der Durchmesser AB also genau horizontal ist. Die Alhidade trägt an ihren Enden zwei auf ihrer Ebene, und also auch auf der Ebene des Kreises senkrecht stehende Dioptern, von denen jede mit einem kleinen Loche versehen ist, welches so angebracht sein muss, dass die beiden Löcher von der Ebene der Alhidade, und also auch von der Ebene des Kreises, gleich weit entfernt sind, und die Projection der durch die Mittelpunkte der beiden Löcher bestimmten geraden Linie auf der Ebene der Alhidade, welche auf dieser Ebene durch eine eingerissene gerade Linie bezeichnet sein muss, durch den Mittelpunkt des eingetheilten Kreises geht. Ist nun S ein beliebiger Licht aussendender Punkt, so gebe man, wozu die nöthigen Vorrichtungen angebracht sein müssen, der Ebene des Kreises durch Drehung um den vertikalen Durchmesser $A'B'$, und der Alhidade durch Drehung um den Mittelpunkt C eine solche Lage, dass man, durch das eine der Löcher in den Dioptern hindurch sehend, den Punkt S genau in der Mitte des anderen Lochs erblickt, stelle in dieser Lage die Ebene des Kreises und die Alhidade fest, und lese auf dem Limbus die Grösse des Winkels ACS ab. Dann wird es immer möglich sein, durch blosse Drehung der wieder gelösten Alhidade um den Mittelpunkt C, ohne

die Ebene des Kreises im Geringsten zu verrücken, indem man immer durch dasselbe Loch wie vorher hindurch sieht, das von der spiegelnden Ebene reflectirte Bild S' des Punkts S genau in die Mitte des Lochs in der anderen Diopter zu bringen, woraus sich in Folge der vorher beschriebenen Einrichtung und Aufstellung der Apparate ganz von selbst ergiebt, dass der einfallende und zurückgeworfene Strahl in einer auf der spiegelnden Ebene senkrecht stehenden Ebene liegen. Zugleich wird man auch bei der zweiten Lage der Alhidade auf dem Limbus die Grösse des Winkels ACS' ablesen können. Denkt man sich nun den horizontalen Durchmesser AB über A hinaus verlängert, so erhellet aus den einfachsten geometrischen Sätzen auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichungen:

$$\angle SS'M = \angle ACS + \angle CSS'$$

und

$$\angle CS'N = \angle ACS'.$$

Hat man aber den Punkt S' auf der spiegelnden Ebene, und vor der gleich nachher in Anspruch zu nehmenden Entfernung des Winkelmessers aus seiner ursprünglichen Stelle auch die Lage seines Mittelpunkts C auf irgend eine möglichst kenntliche Weise bezeichnet, so wird man, indem man den Mittelpunkt des Winkelmessers in dem Punkte S aufstellt, immer auch den Winkel CSS' zu messen im Stande sein. Man kann indess auch der Bequemlichkeit wegen den leuchtenden Punkt S so weit von dem Mittelpunkte C des Kreises bei seiner ersten Aufstellung entfernt annehmen, dass man den Winkel CSS' seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten kann, wo dann eine zweite Aufstellung des Kreises Behufs der Messung des Winkels CSS' nicht weiter nöthig ist. In jedem Falle wird es aber, wie man hieraus sieht, immer möglich sein, die Grösse der beiden Winkel $SS'M$ und $CS'N$ zu bestimmen, und unter allen Verhältnissen wird sich aus solchen Messungen die Gleichheit dieser beiden Winkel stets auf die unzweideutigste Weise ergeben.

Die vorhergehenden Methoden, die Gesetze der Reflexion des Lichts zu erforschen, setzen den Gebrauch eingetheilter Kreise voraus, und möchten deshalb nicht so einfach sein als die folgende bis jetzt, so viel mir bekannt ist, anderwärts noch nicht angegebene Methode, welche den Gebrauch eines Winkelmessers gar nicht in Anspruch nimmt. Auf einer Ebene, die wir E nennen wollen, ziehe man zwei in einem Punkte O *(Fig. 4.)* sich

schneidende beliebige gerade Linien AB und $A'B'$, und errichte in deren Endpunkten vier feine, auf der Ebene E senkrecht stehende etwas lange Stifte A, B, A', B'. Ferner verschaffe man sich eine spiegelnde Ebene, die etwa die Form eines Rechtecks haben kann, und sich mittelst eines Fusses senkrecht auf der Ebene E aufstellen lässt. Die Höhe dieser spiegelnden Ebene betrage nur etwa die Hälfte von der Höhe der Stifte A, B, A', B', und auf derselben sei eine auf ihrer Basis senkrecht stehende und durch deren Mittelpunkt gehende gerade Linie gezogen, die wir durch mn bezeichnen wollen. Auf dieser Linie mn und auf den vier Stiften A, B, A', B' seien genau in gleicher Höhe über der Ebene E auf möglichst kenntliche Weise feine Marken μ und a, b, a', b' angebracht, von denen die vier letzteren auch zweckmässig in feinen durch die Stifte gebohrten Löchern bestehen können. Nun stelle man die spiegelnde Ebene senkrecht auf der Ebene E so auf, dass der Mittelpunkt ihrer Basis MN mit dem Punkte O zusammenfällt, und gebe derselben mittelst sanfter Drehung um den Punkt O eine solche Lage, dass, wenn man, das Auge hinter den Stift A haltend, nach dem Stifte B visirt, die Stifte $A, B,$ das von der spiegelnden Ebene reflectirte Bild des Stifts A', und die Linie mn sich decken, was immer möglich sein wird. Bringt man das Auge hinter dem Stifte A in eine solche Lage, dass die Marken a und μ sich decken, so wird man immer finden, dass auch das von der spiegelnden Ebene reflectirte Bild der Marke a' mit μ zusammenfällt, woraus sich zuvörderst der erste Theil des Gesetzes der Zurückwerfung des Lichts auf unzweideutige Weise ergiebt, dass nämlich der einfallende und der zurückgeworfene Strahl immer in einer auf der spiegelnden Ebene senkrecht stehenden Ebene liegen. Ohne jetzt die Lage der spiegelnden Ebene im Geringsten zu verändern, halte man das Auge nun hinter den Stift A' und visire nach B', so wird man jederzeit finden, dass die Stifte A', B', das von der spiegelnden Ebene reflectirte Bild des Stiftes A, und die Linie mn sich decken, woraus sich die folgenden Schlüsse ziehen lassen. Zuvörderst ist klar, dass A, B, A' und mn ganz dieselbe Lage gegen einander haben wie A', B', A und mn. Nach dem Vorhergehenden sind nun, man mag das Auge hinter A oder hinter A' halten, die Erscheinungen in Bezug auf A, B, A', mn und in Bezug A', B', A, mn völlig dieselben, und können also natürlich auch nur ganz unter denselben Verhältnissen oder Bedingungen hervorgerufen werden, d. h. die spiegelnde Ebene, deren

Lage bei beiden Beobachtungen völlig dieselbe war, muss nothwendig im ersten Falle ganz dieselbe Lage gegen die Linie OA, wie im zweiten Falle gegen die Linie OA' haben, woraus sich die Gleichheit der beiden Winkel AOM und $A'ON$, und also auch die hieraus unmittelbar folgende Gleichheit des Einfallswinkels und des Zurückwerfungswinkels oder der zweite Theil des Gesetzes der Zurückwerfung des Lichts ergiebt. Wie man auch die Linien AB und $A'B'$ auf der Ebene E ziehen mag, so werden sich doch immer ganz dieselben Beobachtungen wie vorher anstellen lassen und dabei ganz dieselben Erscheinungen wie die vorhergehenden zeigen.

§. 3.

Man lasse sich jetzt zwei genau auf einander senkrecht stehende ebene Flächen, die etwa aus zwei unter einem rechten Winkel zusammengefügten recht ebenen dünnen Bretchen bestehen können, und ein rechtwinkliges Parallelepipedon von möglichst reinem Glase anfertigen. Durch einen beliebigen Punkt der Durchschnittslinie der beiden ebenen Flächen ziehe man in jeder derselben eine auf ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie senkrecht stehende gerade Linie, so werden diese beiden geraden Linien den Neigungswinkel der beiden Ebenen gegen einander bestimmen, und daher nach der Voraussetzung auf einander senkrecht stehen. Auf der einen dieser beiden geraden Linien lasse man in der Ebene, auf welcher dieselbe gezogen ist, mehrere feine Löcher anbringen, und ziehe ferner durch einen beliebigen Punkt in der einen Kante des gläsernen rechtwinkligen Parallelepipedons auf den sich in dieser Kante schneidenden Seitenflächen desselben zwei auf der in Rede stehenden Kante senkrechte gerade Linien. Hierauf lege man das Parallelepipedon so zwischen die beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen, dass die beiden Punkte, in denen die der vorhergehenden Kante parallelen, und mit dieser Kante in denselben Seitenflächen liegenden Kanten des Parallelepipedons von den beiden auf demselben gezogenen geraden Linien getroffen werden, in die auf den auf einander senkrecht stehenden Ebenen gezogenen geraden Linien hinein fallen, wonach also die beiden auf den auf einander senkrecht stehenden Ebenen und die beiden auf dem Parallelepipedon gezogenen geraden Linien in einer auf der Durchschnittslinie der beiden auf einander perpendikulären Ebenen senkrecht stehenden Ebene liegen werden, welche in der leicht durch sich selbst verständlichen *Fig. 5.* durch die Ebene

des Papiers dargestellt sein soll. Nun lasse man in einem verfinsterten Zimmer durch das möglichst kleine Loch G in der Linie AE, wobei alle übrigen auf dieser Linie angebrachten Löcher verdeckt sein müssen, einen Lichtstrahl auf das gläserne Parallelepipedon fallen, wozu man sich, um fremdes Licht möglichst abzuhalten, am besten einer nur auf der einen Seite mit einer ebenen Glasfläche verschlossenen, sonst überall von undurchsichtigen Wänden umgebenen Laterne bedienen kann, welche man in eine solche Lage bringt, dass die Glaswand mit der Ebene, in welcher das Loch G angebracht ist, zusammenfällt, so dass aber natürlich das Loch G noch von der Glaswand der Laterne bedeckt wird, und ordne, was immer möglich sein wird, den Versuch so an, dass das Parallelepipedon von dem durch das Loch G einfallenden Strahle in einem Punkte H der auf seiner obern Seitenfläche gezogenen geraden Linie CD getroffen wird, dieser Strahl, nachdem er bei H in das Parallelepipedon getreten, in einem gewissen Punkte I der einen der beiden auf der obern Seitenfläche senkrecht stehenden Seitenflächen des Parallelepipedons aus demselben wieder heraustritt, und dann ferner in einem gewissen Punkte K die der beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen, auf welcher das Parallelepipedon aufgestellt worden ist, trifft.

Dann wird man zuerst auf der Stelle die Bemerkung machen, dass die als leuchtende Punkte sich darstellenden Punkten I und K jederzeit in den auf dem Parallelepipedon und der einen der beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen gezogenen geraden Linien BC und AE liegen, woraus sich in Folge des Vorhergehenden ergiebt, dass die Punkte G, H, I, K immer in einer und derselben auf den Seitenflächen des Parallelepipedons, in denen die aus dem Obigen bekannten geraden Linien gezogen worden sind, senkrecht stehenden Ebene liegen. Zugleich aber wird sich hierbei jederzeit zeigen, dass die Linien GH, HI, IK nie in einer geraden Linie liegen, sondern dass sowohl GH und HI bei H, als auch HI und IK bei I einen Winkel mit einander einschliessen.

Misst man ferner mit einem Maassstabe, der aber auch zweckmässig auf den beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen und auf den Seitenflächen des Parallelepipedons selbst angebracht sein kann, die Linien DG, DH, CH, CI, BI, BK, so kann man in den Dreiecken DGH, CHI, BIK die in der Figur durch φ, ψ, χ bezeichneten Winkel mittelst der Formeln

$$tang\,\varphi = \frac{DH}{DG},\ tang\,\psi = \frac{CH}{CI},\ tang\,\chi = \frac{BK}{BI}$$

leicht berechnen. Bestimmt man dann die Sinus und Cosinus dieser Winkel oder deren Logarithmen, so wird man immer finden, dass wenigstens mit grosser Annäherung, und zwar jederzeit desto genauer, je mehr Sorgfalt man auf die Anstellung der Versuche verwandt hat,

$$\frac{sin\ \varphi}{sin\ \psi} = \frac{cos\ \chi}{cos\,\psi}$$

oder

$$log\ sin\,\varphi - log\ sin\,\psi = log\ cos\,\chi - log\ cos\,\psi,$$

oder auch

$$\frac{sin\,\varphi}{cos\,\chi} = tang\ \psi$$

oder

$$log\ sin\,\varphi - log\ cos\,\chi = log\ tang\,\psi$$

ist. Stellt man aber mehrere Versuche dieser Art unter möglichst verschiedenen Verhältnissen an, und ermittelt immer den Werth der einander gleichen Brüche

$$\frac{sin\,\varphi}{sin\,\psi} \text{ und } \frac{cos\ \chi}{cos\,\psi},$$

oder der einander gleichen Differenzen

$$log\ sin\,\varphi - log\ sin\,\psi \text{ und } log\ cos\,\chi - log\ cos\,\psi;$$

so wird man immer mit grosser Annäherung, und zwar wieder jederzeit desto genauer, mit je grösserer Sorgfalt die Versuche angestellt worden sind, für diese einander gleichen Brüche, oder diese einander gleichen logarithmischen Differenzen, denselben Werth finden, so dass man also diese Werthe als constante Grössen zu betrachten berechtigt sein wird. Man findet nämlich jederzeit nahe

$$\frac{sin\,\varphi}{sin\,\psi} = \frac{cos\ \chi}{cos\,\psi} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

oder genauer

$$\frac{sin\,\varphi}{sin\,\psi} = \frac{cos\ \chi}{cos\,\psi} = \frac{17}{11} = 1{,}55.$$

Die merkwürdige und wichtige Erscheinung, welche wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben, dass nämlich ein Strahl bei

seinem Uebergange aus Luft in Glas oder aus Glas in Luft von seinem geradlinigen Wege abgelenkt wird, eine Erscheinung, welche sich, wie vielfache Versuche gelehrt haben, unter gewissen Bedingungen überhaupt jederzeit zeigt, wenn ein Lichtstrahl aus einem durchsichtigen Körper in einen andern durchsichtigen Körper von verschiedener Dichtigkeit übergeht, nennt man die Brechung oder Refraction des Lichts. Der Theil des Strahls von seinem Ausgangspunkte bis zu dem Punkte, in welchem von demselben die Fläche, welche die beiden durchsichtigen Körper von einander trennt, getroffen wird, heisst der einfallende Strahl, und der in Rede stehende Punkt wird der Einfallspunkt genannt; der andere von dem Einfallspunkte ausgehende Theil des Strahls heisst der gebrochene Strahl. Die durch den Einfallspunkt auf die Fläche, welche die beiden durchsichtigen Körper von einander trennt, senkrecht gezogene gerade Linie heisst das Einfallsloth, und die beiden 90° nicht übersteigenden Winkel, welche der einfallende und gebrochene Strahl mit dem Einfallslothe einschliessen, werden respective der Einfallswinkel und der Brechungswinkel oder Refractionswinkel genannt. Die Versuche zeigen auch, dass der einfallende und der gebrochene Strahl immer auf verschiedenen Seiten des Einfallsloths liegen.

Wenn man sich in *H* und *I* die Einfallslothe auf die, Glas und Luft von einander trennenden Flächen, welche hier Ebenen sind, errichtet denkt, und nur überlegt, dass offenbar für die bei *H* stattfindende Brechung bei dem Uebergange aus Luft in Glas der Einfallswinkel und der Brechungswinkel respective φ und ψ, für die bei *I* stattfindende Brechung bei dem Uebergange aus Glas in Luft der Einfallswinkel und der Brechungswinkel respective $90° - \psi$ und $90° - \chi$ sind, und dass nach dem Obigen

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin(90° - \chi)}{\sin(90° - \psi)} = 1 : \frac{\sin(90° - \psi)}{\sin(90° - \chi)}$$

eine constante Grösse ist, zugleich aber überhaupt alle bei der Brechung nach dem Obigen sich zeigenden Erscheinungen zusammennimmt; so wird aus dem Vorhergehenden leicht erhellen, dass das Gesetz der Brechung oder Refraction des Lichts als das dritte Grundgesetz der Optik auf folgende Art ausgesprochen werden kann:

Drittes Grundgesetz der Optik. Bei der Bre-

chung oder Refraction des Lichts liegen der einfallende und der gebrochene Strahl jederzeit auf entgegengesetzten Seiten der die beiden durchsichtigen Körper von einander trennenden Fläche; in der durch diese beiden Strahlen bestimmten Ebene liegt zwischen denselben auch das Einfallsloth, und für jede zwei durchsichtige Körper ist der Bruch oder Quotient, welchen man erhält, wenn man den Sinus des Einfallswinkels durch den Sinus des Brechungswinkels dividirt, so lange constant, als der einfallende und gebrochene Strahl in denselben durchsichtigen Körpern liegen, erhält aber seinen reciproken Werth, wenn der einfallende und der gebrochene Strahl in den durchsichtigen Körpern liegen, in denen vorher respective der gebrochene und der einfallende Strahl lagen.

Der Bruch, welchen man erhält, wenn man den Sinus des Einfallswinkels durch den Sinus des Brechungswinkels dividirt, wird das Brechungsverhältniss genannt; wenigstens wollen wir diesen Begriff für das Folgende auf die vorhergehende Weise feststellen. Für Luft und Glas ist nach dem Obigen das Brechungsverhältniss also $\frac{17}{11}$ oder $\frac{11}{17}$, jenachdem der Strahl aus Luft in Glas oder aus Glas in Luft übergeht. Bezeichnen wir überhaupt den Einfallswinkel durch ω, den Brechungswinkel durch ω_1, so ist

$$\frac{sin\,\omega}{sin\,\omega_1}$$

das Brechungsverhältniss, und setzen wir nun

$$\frac{sin\ \omega}{sin\ \omega_1} = \frac{1}{\mu},\ \text{also}\ sin\ \omega_1 = \mu\ sin\ \omega;$$

so ist μ für dieselben durchsichtigen Körper, so lange auch der einfallende und der gebrochene Strahl in denselben durchsichtigen Körpern liegen, eine constante Grösse.

Wenn wir $\omega = 0$ setzen, d. h. den einfallenden Strahl mit dem Einfallslothe zusammenfallen lassen, so ist wegen der Gleichung $sin\ \omega_1 = \mu\ sin\ \omega$ auch $\omega_1 = 0$, d. h. auch der gebrochene Strahl fällt mit dem Einfallslothe zusammen, und es findet also in diesem Falle eigentlich gar keine Brechung mehr Statt,

was auch ganz mit der Erfahrung übereinstimmt. Ein gerader Stab z. B., den man in ein Gefäss mit Wasser so hinein hält, dass er auf der Oberfläche des Wassers senkrecht steht, erscheint ganz gerade, da er im Gegentheil aus zwei einen Winkel mit einander bildenden Theilen zu bestehen scheint, wenn man ihn gegen die Oberfläche des Wassers neigt.

Wenn man aus dem Einfallswinkel ω den Brechungswinkel ω_1 mittelst der Gleichung

$$sin\ \omega_1 = \mu\ sin\ \omega$$

bestimmt, so ist diese Bestimmung offenbar nur so lange möglich, so lange

$$\mu\ sin\,\omega \leqq 1,\ \text{d. h. } sin\,\omega \leqq \frac{1}{\mu}$$

ist, dagegen unmöglich, wenn

$$sin\,\omega > \frac{1}{\mu}$$

ist. Die Erfahrung hat gelehrt, dass in dem letzteren Falle gar keine Brechung mehr stattfindet, sondern dieselbe in eine Reflexion übergeht, so dass nämlich der einfallende Strahl, ohne aus dem einen durchsichtigen Körper in den andern überzutreten, an der die beiden durchsichtigen Körper von einander trennenden Fläche ganz nach den bekannten Gesetzen der Zurückwerfung reflectirt wird. Dies ist aber ein Ausnahmefall von dem allgemeinen Gesetze, welcher für unsere folgenden analytischen Untersuchungen über die Zurückwerfung und Brechung zunächst wenigstens von keiner Bedeutung ist.

Der Theil der Optik, welcher sich, von dem obigen dritten Grundgesetze ausgehend, mit der genauen Entwickelung aller der Gesetze beschäftigt, nach welchen die von der Brechung oder Refraction des Lichts hervorgebrachten Erscheinungen erfolgen, heisst die Dioptrik.

§. 4.

Im Folgenden werden wir die Zurückwerfung und Brechung unter einem allgemeinen Gesichtspunkte zusammenfassen, und wollen diesem allgemeinen Gesichtspunkte gemäss die im Vorhergehenden erläuterten Begriffe nun auch theilweise etwas anders bestimmen.

Wir denken uns einen Strahl, den einfallenden Strahl, welcher, von einem gewissen Punkte, dem Ausgangspunkte, ausgehend, eine beliebige Fläche in einem bestimmten Punkte, dem Einfallspunkte, trifft, und ziehen von diesem Punkte aus, auf derselben Seite der in Rede stehenden Fläche mit dem einfallenden Strahle, eine auf dieser Fläche senkrecht stehende gerade Linie, das Einfallsloth. In dem Einfallspunkte wird nun der einfallende Strahl von seinem ursprünglichen geradlinigen Wege in eine andere gerade Linie, welche wir den abgelenkten Strahl nennen wollen, abgelenkt. Die von dem einfallenden und abgelenkten Strahle mit dem Einfallslothe eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel wollen wir respective den Einfallswinkel und den Ablenkungswinkel nennen, und der Bruch, welchen man erhält, wenn man den Sinus des Einfallswinkels durch den Sinus des Ablenkungswinkels dividirt, soll das Ablenkungsverhältniss genannt werden. Die Ablenkung geschieht aber immer nach den folgenden Gesetzen:

1) Der einfallende Strahl, das Einfallsloth und der abgelenkte Strahl liegen jederzeit in einer und derselben Ebene, und der einfallende und der abgelenkte Strahl liegen immer auf verschiedenen Seiten des nöthigenfalls über den Einfallspunkt hinaus verlängert gedachten Einfallsloths.

2) Das Ablenkungsverhältniss ist so lange constant, als sowohl der einfallende, als auch der abgelenkte Strahl sich in demselben durchsichtigen Körper bewegt, erhält aber jederzeit seinen reciproken Werth, wenn der einfallende und der abgelenkte Strahl sich in den durchsichtigen Körpern bewegen, in denen sich vorher respective der abgelenkte und der einfallende Strahl bewegte.

3) Der einfallende und der abgelenkte Strahl können aber entweder mit dem Einfallslothe auf einer und derselben Seite der von dem einfallenden Strahle in dem Einfallspunkte getroffenen Fläche liegen, oder der einfallende Strahl und das Einfallsloth liegen der oben gegebenen Erklärung des letzteren gemäss auf einer und derselben, der abgelenkte Strahl auf der entgegengesetzten Seite dieser Fläche. Den ersten dieser beiden Fälle wollen wir im Allgemeinen mit dem Namen der Zurückwerfung oder Reflexion, den zweiten mit dem Namen der Brechung oder Refraction belegen. Natürlich erhält auch das Ablenkungsverhältniss im ersten Falle den Namen des Zurückwerfungsverhältnisses, im zweiten Falle den Namen des Bre-

chungsverhältnisses, und eben so leicht wird aus dem Obigen von selbst erhellen, was man im ersten Falle unter den Ausdrücken zurückgeworfener Strahl und Zurückwerfungswinkel, im zweiten Falle unter den Ausdrücken gebrochener Strahl und Brechungswinkel zu verstehen hat.

Im gewöhnlichen Falle der Reflexion ist der numerische Werth des Zurückwerfungsverhältnisses die Einheit.

Von den obigen allgemeinen Gesetzen ausgehend, wollen wir nun im folgenden Kapitel zunächst die allgemeinen Grundformeln zur Bestimmung der Lage des abgelenkten Strahls entwickeln, wenn die Lage des einfallenden Strahls und das Ablenkungsverhältniss als gegeben betrachtet werden. Dabei werden wir aber für jetzt durchaus nur die Fälle berücksichtigen, wenn die von dem einfallenden Strahle in dem Einfallspunkte getroffene Fläche, an welcher die Ablenkung vor sich geht, eine Ebene oder eine Kugelfläche ist, was für unsern gegenwärtigen Zweck völlig hinreicht.

Zweites Kapitel.

Die Grundformeln.

§. 5.

Es seien überhaupt

$$1)\quad y = Ax + B,\ z = A_1x + B_1$$

die Gleichungen einer geraden Linie im Raume in Bezug auf das beliebige rechtwinklige Coordinatensystem der xyz. In dieser geraden Linie nehme man einen beliebigen Punkt als Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme der xyz parallelen Coordinatensystems der $x_1 y_1 z_1$ an. Dann sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$2)\quad y_1 = Ax_1,\ z_1 = A_1x_1$$

die Gleichungen unserer geraden Linie in Bezug auf das System der $x_1 y_1 z_1$. Die 180° nicht übersteigenden Winkel, die einer der beiden Theile dieser geraden Linie, in welche dieselbe von dem

Anfange der $x_1\, y_1\, z_1$ getheilt wird, mit den positiven Theilen der Axen der x_1, y_1, z_1 einschliesst, seien respective α, β, γ; und a_1, b_1, c_1 seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem in Rede stehenden Theile unserer geraden Linie in dem Systeme der x_1, y_1, z_1; die Entfernung dieses Punktes von dem Anfange der x_1 y_1 z_1 werde aber durch ϱ bezeichnet. Dann ist in völliger Allgemeinheit

$$3)\quad a_1 = \varrho\, cos\,\alpha,\ b_1 = \varrho\, cos\,\beta,\ c_1 = \varrho\, cos\,\gamma;$$

wie augenblicklich erhellet, wenn man nur überlegt, dass nach einer bekannten Construction die geometrischen Darstellungen der Coordinaten a_1, b_1, c_1 des Punktes $(a_1\ b_1\ c_1)$ leicht erhalten werden, wenn man von diesem Punkte auf die Axen der x_1, y_1, z_1 drei Perpendikel fällt. Weil nun nach 2)

$$b_1 = A\, a_1,\ c_1 = A_1\, a_1$$

ist, so ist nach 3)

$$\varrho\, cos\,\beta = \varrho\, A\, cos\,\alpha,\ \varrho\, cos\,\gamma = \varrho\, A_1\, cos\,\alpha;$$

also

$$4)\quad A = \frac{cos\,\beta}{cos\,\alpha},\ A_1 = \frac{cos\,\gamma}{cos\,\alpha}.$$

Sind nun a, b, c die Coordinaten irgend eines Punktes der durch die Gleichungen 1) charakterisirten geraden Linie in dem Systeme der $x\, y\, z$, so ist nach 1)

$$b = A\, a + B,\ c = A_1\, a + B_1;$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen von den Gleichungen 1) subtrahirt:

$$y - b = A\,(x - a),\ z - c = A_1\,(x - a).$$

Also lassen sich nach 4) die Gleichungen der gegebenen geraden Linie immer unter der Form

$$5)\quad \begin{cases} y - b = \dfrac{cos\,\beta}{cos\,\alpha}\,(x - a), \\ z - c = \dfrac{cos\,\gamma}{cos\,\alpha}\,(x - a); \end{cases}$$

oder unter der Form

$$6)\quad \frac{x - a}{cos\,\alpha} = \frac{y - b}{cos\,\beta} = \frac{z - c}{cos\,\gamma}$$

darstellen, wobei man aber nicht aus den Augen zu lassen hat, dass hierbei immer rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt wer-

den, und (abc) ein Punkt der in Rede stehenden geraden Linie sein muss. Wir werden im Folgenden von dieser Form der Gleichungen einer geraden Linie vielfachen Gebrauch zu machen Gelegenheit haben.

Liegt die gegebene gerade Linie in der Ebene der xy, so ist nach dem Vorhergehenden ihre Gleichung in dieser Ebene

$$7)\quad y - b = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - a)$$

oder

$$8)\quad \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta}.$$

Lässt man nun aber α den Winkel bezeichnen, den der eine der beiden Theile der geraden Linie, in welche dieselbe durch den Punkt (abc) oder, wie man diesen Punkt jetzt auch nennen kann, durch den Punkt (ab) getheilt wird, mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch diesen Punkt gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe dieses secundären Systems an nach dem positiven Theile der zweiten Axe desselben Systems hin von 0 bis 360° zählt, so muss man im Vorhergehenden, wie mittelst einer einfachen Betrachtung sogleich erhellen wird, für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ respective $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ setzen; und die Gleichung unserer geraden Linie wird also nach 7) unter dieser Voraussetzung:

$$9)\quad y - b = (x - a)\ tang\,\alpha.$$

§. 6.

Indem wir nun unserem eigentlichen Gegenstande näher treten, denken wir uns überhaupt drei von einem Punkte im Raume ausgehende, sämmtlich in einer Ebene liegende gerade Linien, welche wir für jetzt die erste, zweite, dritte gerade Linie nennen wollen, und bezeichnen die Gleichungen dieser drei geraden Linien, und natürlich auch ihrer Verlängerungen über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus, in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz nach der Reihe durch

$$10)\quad \begin{cases} y = ax + f, & z = bx + g; \\ y = a'x + f', & z = b'x + g'; \\ y = a_1x + f_1, & z = b_1x + g_1. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Punktes, von welchem diese drei geraden Linien ausgehen, in dem angenommenen rechtwinkligen Systeme der xyz seien p_1, q_1, r_1; und die Gleichungen der Ebene, in welcher die drei geraden Linien liegen, sei

$$11)\quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ferner seien Θ und Θ_1 die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die erste und dritte gerade Linie mit der zweiten geraden Linie einschliessen.

Weil der Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ in jeder der drei geraden Linien, also auch in der durch die Gleichung 11) charakterisirten Ebene liegt; so haben wir nach 10) und 11) die Gleichungen:

$$12)\quad \begin{cases} q_1 = ap_1 + f,\ r_1 = bp_1 + g; \\ q_1 = a'p_1 + f',\ r_1 = b'p_1 + g'; \\ q_1 = a_1p_1 + f_1,\ r_1 = b_1p_1 + g_1; \end{cases}$$

und

$$13)\quad Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 + D = 0.$$

Weil ferner jede unserer drei geraden Linien nebst ihrer Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus ganz in der durch die Gleichung 11) charakterisirten Ebene liegt, so ist nach 10) und 11) offenbar für jedes x:

$$\begin{aligned} (A + Ba + Cb)\ x + Bf + Cg + D &= 0, \\ (A + Ba' + Cb')\ x + Bf' + Cg' + D &= 0, \\ (A + Ba_1 + Cb_1)\ x + Bf_1 + Cg_1 + D &= 0; \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar die beiden folgenden Systeme von Gleichungen ergeben:

$$14)\quad \begin{cases} A + Ba + Cb = 0, \\ A + Ba' + Cb' = 0, \\ A + Ba_1 + Cb_1 = 0; \end{cases}$$

und

$$15)\quad \begin{cases} Bf + Cg + D = 0, \\ Bf' + Cg' + D = 0, \\ Bf_1 + Cg_1 + D = 0. \end{cases}$$

Ferner ist nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$16)\quad \begin{cases} \sin\Theta = \sqrt{\dfrac{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2}{(1+a^2+b^2)\,(1+a'^2+b'^2)}}, \\ \sin\Theta_1 = \sqrt{\dfrac{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1-a_1b')^2}{(1+a'^2+b'^2)\,(1+a_1^2+b_1^2)}}; \end{cases}$$

und folglich, wie leicht erhellet:

$$17)\ \sin\Theta : \sin\Theta_1 = \sqrt{\frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2}} : \sqrt{\frac{(a'-a_1)^2+(b'-b_1)^2+(a'b_1-a_1b')^2}{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}}.$$

Wegen der Gleichungen 14) ist nun

$$18)\ \begin{cases} A(a-a')+C(ab'-a'b)=0, \\ A(a'-a_1)+C(a'b_1-a_1b')=0, \\ A(a_1-a)+C(a_1b-ab_1)=0 \end{cases}$$

und

$$19)\ \begin{cases} B(a-a')+C(b-b')=0, \\ B(a'-a_1)+C(b'-b_1)=0, \\ B(a_1-a)+C(b_1-b)=0; \end{cases}$$

oder

$$20)\ \begin{cases} A(a-a')=-C(ab'-a'b), \\ A(a'-a_1)=-C(a'b_1-a_1b'), \\ A(a_1-a)=-C(a_1b-ab_1) \end{cases}$$

und

$$21)\ \begin{cases} B(a-a')=-C(b-b), \\ B(a'-a_1)=-C(b'-b_1), \\ B(a_1-a)=-C(b_1-b). \end{cases}$$

Also ist

$$22)\ \frac{ab'-a'b}{a-a'}=\frac{a'b_1-a_1b'}{a'-a_1}=\frac{a_1b-ab_1}{a_1-a}=-\frac{A}{C}$$

und

$$23)\ \frac{b-b'}{a-a'}=\frac{b'-b_1}{a'-a_1}=\frac{b_1-b}{a_1-a}=-\frac{B}{C}.$$

Nach 20) und 21) hat man auch die folgenden Gleichungen:

$$A^2(a-a')^2=C^2(ab'-a'b)^2,$$
$$B^2(a-a')^2=C^2(b-b')^2,$$
$$C^2(a-a')^2=C^2(a-a')^2$$

und

$$A^2(a'-a_1)^2=C^2(a'b_1-a_1b')^2,$$
$$B^2(a'-a_1)^2=C^2(b'_1-b_1)^2$$
$$C^2(a'-a_1)^2=C^2(a'-a_1)^2.$$

Also ist

$$(A^2 + B^2 + C^2)\,(a - a')^2 = C^2\,\{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab' - a'b)^2\}$$

und

$$(A^2 + B^2 + C^2)\,(a' - a_1)^2 = C^2\,\{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1 - a_1 b')^2\};$$

folglich

$$\left(\frac{a'-a_1}{a-a'}\right)^2 = \frac{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1 - a_1 b')^2}{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab' - a'b)^2}.$$

Weil nun nach 17)

$$\sin\Theta^2 : \sin\Theta_1{}^2 = \frac{1 + a_1{}^2 + b_1{}^2}{1 + a^2 + b^2} : \frac{(a'-a_1)^2 + (b'-b_1)^2 + (a'b_1 - a_1 b')^2}{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab' - a'b)^2}$$

ist, so ist nach dem Verhergehenden

$$\sin\Theta^2 : \sin\Theta_1{}^2 = \frac{1 + a_1{}^2 + b_1{}^2}{1 + a^2 + b^2} : \left(\frac{a' - a_1}{a - a'}\right)^2,$$

also

$$24)\quad \left(\frac{a-a'}{a'-a_1}\right)^2 \cdot \frac{1 + a_1{}^2 + b_1{}^2}{1 + a^2 + b^2} = \left(\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}\right)^2,$$

oder, wenn wir annehmen, dass das Verhältniss

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}$$

constant ist, und der Kürze wegen, indem n eine positive Grösse bezeichnet,

$$25)\quad \frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1} = n$$

setzen:

$$26)\quad \left(\frac{a-a'}{a'-a_1}\right)^2 \cdot \frac{1 + a_1{}^2 + b_1{}^2}{1 + a^2 + b^2} = n^2.$$

Da nach 23)

$$\frac{a-a'}{a'-a_1} = \frac{b-b'}{b'-b_1}$$

und nach 22)

$$\frac{a-a'}{a'-a_1} = \frac{ab' - a'b}{a'b_1 - a_1 b'}$$

ist, so ist auch

$$27)\quad \left(\frac{b-b'}{b'-b_1}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2$$

und

$$28)\quad \left(\frac{ab'-a'b}{a'b_1-a_1b'}\right)^2 \cdot \frac{1+a_1^2+b_1^2}{1+a^2+b^2} = n^2.$$

§. 7.

Durch den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt unserer drei geraden Linien denken wir uns jetzt ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x_1 y_1 z_1$ gelegt, und bezeichnen die von den drei Linien mit den positiven Theilen der Axen der x_1, y_1, z_1 eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; so sind nach 6) die Gleichungen unserer drei Linien nebst ihren Verlängerungen über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt hinaus in dem Systeme der $x\,y\,z$, da p_1, q_1, r_1 die Coordinaten des gemeinschaftlichen Ausgangspunktes der drei Linien in diesem Systeme sind:

$$29)\quad \begin{cases} \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma}, \\ \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha'} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta'} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma'}, \\ \dfrac{x-p_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y-q_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{z-r_1}{\cos\gamma_1}; \end{cases}$$

und im Obigen ist also

$$30)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \quad b = \dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}; \\ a' = \dfrac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}, \quad b' = \dfrac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}, \\ a_1 = \dfrac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}, \quad b_1 = \dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1} \end{cases}$$

zu setzen.

Daher ist nach 22)

$$31)\quad \frac{A}{C} = \frac{\cos\beta\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\beta'}{\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha'}$$

$$= \frac{\cos\beta'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\beta_1}{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\,\cos\alpha_1}$$

$$= \frac{\cos\beta_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\,\cos\beta}{\cos\alpha_1\cos\beta - \cos\beta_1\,\cos\alpha}$$

und nach 23)

$$32)\quad \frac{B}{C} = -\frac{\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha'}{\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha'}$$

$$= -\frac{\cos\alpha'\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\alpha_1}{\cos\alpha'\,\cos\beta_1 - \cos\beta'\,\cos\alpha_1}$$

$$= -\frac{\cos\alpha_1\,\cos\gamma - \cos\gamma_1\,\cos\alpha}{\cos\alpha_1\,\cos\beta - \cos\beta_1\,\cos\alpha};$$

also

$$33)\quad \frac{A}{B} = -\frac{\cos\beta\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\beta'}{\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha'}$$

$$= -\frac{\cos\beta'\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\beta_1}{\cos\alpha'\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\alpha_1}$$

$$= -\frac{\cos\beta_1\,\cos\gamma - \cos\gamma_1\,\cos\beta}{\cos\alpha_1\,\cos\gamma - \cos\gamma_1\,\cos\alpha};$$

oder, wie man etwas symmetrischer diese Ausdrücke auch schreiben kann:

$$34)\quad \frac{A}{B} = \frac{\cos\gamma\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\gamma'}{\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha'}$$

$$= \frac{\cos\gamma'\,\cos\beta_1 - \cos\beta'\,\cos\gamma_1}{\cos\alpha'\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\alpha_1}$$

$$= \frac{\cos\gamma_1\,\cos\beta - \cos\beta_1\,\cos\gamma}{\cos\alpha_1\,\cos\gamma - \cos\gamma_1\,\cos\alpha},$$

$$35)\quad \frac{B}{C} = \frac{\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha'}{\cos\beta\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\beta'}$$

$$= \frac{\cos\alpha'\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\alpha_1}{\cos\beta'\,\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\,\cos\beta_1}$$

$$= \frac{\cos\alpha_1\,\cos\gamma - \cos\gamma_1\,\cos\alpha}{\cos\beta_1\,\cos\alpha - \cos\alpha_1\,\cos\beta},$$

$$36)\quad \frac{C}{A} = \frac{\cos\beta\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\beta'}{\cos\gamma\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\gamma'}$$

$$= \frac{\cos\beta'\,\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\,\cos\beta_1}{\cos\gamma'\,\cos\beta_1 - \cos\beta'\,\cos\gamma_1}$$

$$= \frac{\cos\beta_1\,\cos\alpha - \cos\alpha_1\,\cos\beta}{\cos\gamma_1\,\cos\beta - \cos\beta_1\,\cos\gamma}.$$

Nach der Gleichung 26) ist ferner

$$\left\{\frac{\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}-\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}}{\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}-\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}}\right\}^2\cdot\frac{1+\left(\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1}\right)^2}{1+\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)^2}=n^2,$$

woraus sich leicht

$$\left(\frac{\cos\alpha\ \cos\beta'-\cos\beta\ \cos\alpha'}{\cos\alpha'\ \cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}\right)^2\cdot\frac{\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2}{\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2}=n^2,$$

d. i., weil nach einem aus der analytischen Geometrie bekannten Satze

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$
$$\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2=1$$

ist,

$$\left(\frac{\cos\alpha\ \cos\beta'-\cos\beta\ \cos\alpha'}{\cos\alpha\ \cos\beta_1-\cos\beta'\ \cos\alpha_1}\right)^2=n^2,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$37)\quad \mu=\pm\frac{1}{n}$$

setzen,

$$38)\quad \frac{\cos\alpha'\ \cos\beta_1-\cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\ \cos\beta'-\cos\beta\ \cos\alpha'}=\mu$$

ergiebt.

Weil nun aber nach dem Obigen

$$\frac{\cos\alpha'\ \cos\beta_1-\cos\beta'\ \cos\alpha_1}{\cos\alpha\ \cos\beta'-\cos\beta\ \cos\alpha'}$$
$$=\frac{\cos\beta'\ \cos\gamma_1-\cos\gamma'\ \cos\beta_1}{\cos\beta\ \cos\gamma'-\cos\gamma\ \cos\beta'}$$
$$=\frac{\cos\gamma'\ \cos\alpha_1-\cos\alpha'\ \cos\gamma_1}{\cos\gamma\ \cos\alpha'-\cos\alpha\ \cos\gamma'}$$

ist, so haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$39)\quad\begin{cases}\frac{\cos\alpha'\ \cos\beta_1-\cos\beta'\ \cos\alpha_1}{\cos\alpha\ \cos\beta'-\cos\beta\ \cos\alpha'}=\mu,\\ \frac{\cos\beta'\ \cos\gamma_1-\cos\gamma'\ \cos\beta_1}{\cos\beta\ \cos\gamma'-\cos\gamma\ \cos\beta'}=\mu,\\ \frac{\cos\gamma'\ \cos\alpha_1-\cos\alpha'\ \cos\gamma_1}{\cos\gamma\ \cos\alpha'-\cos\alpha\ \cos\gamma'}=\mu;\end{cases}$$

aus denen sich leicht die Relationen:

$$40)\quad \left.\begin{aligned}&(\cos\beta\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\beta')\,\cos\alpha_1\\ &+(\cos\gamma\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\gamma')\,\cos\beta_1\\ &+(\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')\,\cos\gamma_1\end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$41)\quad \left.\begin{aligned}&(\cos\beta\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma\,\cos\beta_1)\,\cos\alpha'\\ &+(\cos\gamma\,\cos\alpha_1 - \cos\alpha\,\cos\gamma_1)\,\cos\beta'\\ &+(\cos\alpha\,\cos\beta_1 - \cos\beta\,\cos\alpha_1)\,\cos\gamma'\end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$42)\quad \left.\begin{aligned}&(\cos\beta'\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\beta_1)\,\cos\alpha\\ &+(\cos\gamma'\,\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\,\cos\gamma_1)\,\cos\beta\\ &+(\cos\alpha'\,\cos\beta_1 - \cos\beta'\,\cos\alpha_1)\,\cos\gamma\end{aligned}\right\} = 0$$

ergeben.

Nach 39) ist nun

$$\cos\beta'\,\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\,\cos\beta_1 = \mu\,(\cos\beta\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\beta'),$$
$$\cos\gamma'\,\cos\beta_1 - \cos\beta'\,\cos\gamma_1 = \mu\,(\cos\gamma\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\gamma'),$$
$$\cos\alpha'\,\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\,\cos\alpha_1 = \mu\,(\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha');$$

und man hat daher die drei folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\cos\alpha'\,\cos\alpha_1 = \cos\alpha'\,\cos\alpha_1,$$
$$\cos\alpha'\,\cos\beta_1 = \cos\beta'\,\cos\alpha_1 + \mu\,(\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha'),$$
$$\cos\alpha'\,\cos\gamma_1 = \cos\gamma'\,\cos\alpha_1 + \mu\,(\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha');$$

ferner

$$\cos\beta'\,\cos\alpha_1 = \cos\alpha'\,\cos\beta_1 + \mu\,(\cos\beta\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\beta'),$$
$$\cos\beta'\,\cos\beta_1 = \cos\beta'\,\cos\beta_1,$$
$$\cos\beta'\,\cos\gamma_1 = \cos\gamma'\,\cos\beta_1 + \mu\,(\cos\beta\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\beta');$$

endlich

$$\cos\gamma'\,\cos\alpha_1 - \cos\alpha'\,\cos\gamma_1 + \mu\,(\cos\gamma\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\gamma'),$$
$$\cos\gamma'\,\cos\beta_1 = \cos\beta'\,\cos\gamma_1 + \mu\,(\cos\gamma\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\gamma'),$$
$$\cos\gamma'\,\cos\gamma_1 = \cos\gamma'\,\cos\gamma_1.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen und addirt die dadurch sich ergebenden Gleichungen zu einander, so erhält man, mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung:

$$\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2 = 1,$$

die drei folgenden Gleichungen:

$$43)\quad \begin{cases} \cos\alpha'^2 = \cos\alpha'^2\,\cos\alpha_1^2 \\ \quad + \left\{\cos\beta'\,\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')\right\}^2 \\ \quad + \left\{\cos\gamma'\,\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha')\right\}^2, \\ \cos\beta'^2 = \cos\beta'^2\cos\beta_1^2 \\ \quad + \left\{\cos\alpha'\,\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\beta')\right\}^2 \\ \quad + \left\{\cos\gamma'\,\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\beta')\right\}^2, \\ \cos\gamma'^2 = \cos\gamma'^2\,\cos\gamma_1^2 \\ \quad + \left\{\cos\alpha'\,\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\gamma')\right\}^2 \\ \quad + \left\{\cos\beta'\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\gamma')\right\}^2; \end{cases}$$

oder auch

$$43^*)\quad \begin{cases} 1 = \left\{\dfrac{\cos\beta'\,\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')}{\cos\alpha'\,\sin\alpha_1}\right\}^2 \\ \quad + \left\{\dfrac{\cos\gamma'\,\cos\alpha_1 + \mu(\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha')}{\cos\alpha'\,\sin\alpha_1}\right\}^2, \\ 1 = \left\{\dfrac{\cos\alpha'\,\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\beta')}{\cos\beta'\,\sin\beta_1}\right\}^2 \\ \quad + \left\{\dfrac{\cos\gamma'\cos\beta_1 + \mu(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\beta')}{\cos\beta'\,\sin\beta_1}\right\}^2, \\ 1 = \left\{\dfrac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\,\cos\alpha' - \cos\alpha\,\cos\gamma')}{\cos\gamma'\,\sin\gamma_1}\right\}^2 \\ \quad + \left\{\dfrac{\cos\beta'\,\cos\gamma_1 + \mu(\cos\gamma\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\gamma')}{\cos\gamma'\,\sin\gamma_1}\right\}^2. \end{cases}$$

Durch gehörige Entwickelung der ersten der Gleichungen 43) erhält man, weil bekanntlich

$$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1$$

ist, die Gleichung

$$\cos\alpha'^2 = \cos\alpha_1^2 + 2\mu \begin{Bmatrix} \cos\beta'(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha') \\ + \cos\gamma'(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha') \end{Bmatrix} \cos\alpha_1 + \mu^2 \begin{Bmatrix} (\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')^2 \\ + (\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha')^2 \end{Bmatrix},$$

und folglich

$$\cos\alpha_1^{\,2} + 2\mu \left\{ \begin{matrix} \cos\beta' \,(\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') \\ + \cos\gamma' \,(\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha') \end{matrix} \right\} \cos\alpha_1$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2 \left\{ \begin{matrix} (\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')^2 \\ + (\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha')^2 \end{matrix} \right\}.$$

Es ist aber

$$\begin{matrix} \cos\beta' \,(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha) \\ + \cos\gamma' \,(\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha') \end{matrix}$$
$$= \cos\alpha\,(\cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) - \cos\alpha'\,(\cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma')$$
$$= \cos\alpha\,(\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) - \cos\alpha'\,(\cos\alpha\,\cos\alpha' + \cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma')$$

und

$$\begin{matrix} (\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')^2 \\ + (\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha')^2 \end{matrix}$$
$$= \cos\alpha^2\,(\cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) + \cos\alpha'^2\,(\cos\beta^2 + \cos\gamma^2) - 2\,\cos\alpha\,\cos\alpha'\,(\cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma')$$
$$= \cos\alpha^2\,(\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) + \cos\alpha'^2\,(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) - 2\,\cos\alpha\,\cos\alpha'\,(\cos\alpha\,\cos\alpha' + \cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma').$$

Weil nun bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1$$

und

44) $\cos\Theta = \cos\alpha\,\cos\alpha' + \cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma'$

ist, so ist

$$\begin{matrix} \cos\beta' \,(\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha') \\ + \cos\gamma' \,(\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha') \end{matrix}$$
$$= \cos\alpha - \cos\alpha'\,\cos\Theta$$

und

$$\begin{matrix} (\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')^2 \\ + (\cos\beta\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\alpha')^2 \end{matrix}$$
$$= \cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\,\cos\alpha\,\cos\alpha'\,\cos\Theta.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$\cos\alpha_1^2 + 2\mu\,(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)\cos\alpha_1$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\,(\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta),$$

also

$$\{\cos\alpha_1 + \mu\,(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)\}^2$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\{\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2 - 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\Theta - (\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta)^2\}$$
$$= \cos\alpha'^2 - \mu^2\cos\alpha'^2\sin\Theta^2 = \cos\alpha'^2(1 - \mu^2\sin\Theta^2).$$

Daher ist

$$\cos\alpha_1 + \mu\,(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\Theta) = \pm\cos\alpha'\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2},$$

und folglich

$$\cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2})$$

Nach dem Obigen ist

$$\cos\beta_1 = \frac{\cos\beta'\cos\alpha_1 + \mu\,(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')}{\cos\alpha'},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\gamma'\cos\alpha_1 + \mu\,(\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha')}{\cos\alpha'}.$$

Führt man in diese Ausdrücke den vorher gefundenen Ausdruck von $\cos\alpha_1$ ein, so erhält man die drei folgenden Gleichungen, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$45)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}), \\ \cos\beta_1 = -\mu\cos\beta + \cos\beta'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}), \\ \cos\gamma_1 = -\mu\cos\gamma + \cos\gamma'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}); \end{cases}$$

oder

$$46)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha_1 + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}, \\ \dfrac{\cos\beta_1 + \mu\cos\beta}{\cos\beta'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}, \\ \dfrac{\cos\gamma_1 + \mu\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}. \end{cases}$$

Vorzüglich entsteht jetzt die Frage, wie man in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen hat, worüber sich, indem wir von jetzt an die zweite gerade Linie das Einfallsloth nennen wollen, auf folgende Art eine bestimmte Entscheidung geben lässt.

Nach 29) sind

$$y - q_1 = \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}(x - p_1),$$

$$z - r_1 = \frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}(x - p_1)$$

die Gleichungen der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie. Sind nun ϱ und ϱ_1 die Entfernungen zweier beliebiger Punkte in der ersten und dritten geraden Linie von dem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte $(p_1\ q_1\ r_1)$ der drei Linien, so sind die Coordinaten dieser Punkte in dem Systeme der $x\,y\,z$, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit:

$$p_1 + \varrho\cos\alpha,\ q_1 + \varrho\cos\beta,\ r_1 + \varrho\cos\gamma$$

und

$$p_1 + \varrho_1\cos\alpha_1,\ q_1 + \varrho_1\cos\beta_1,\ r_1 + \varrho_1\cos\gamma_1.$$

Die Gleichungen der durch diese beiden Punkte der Lage nach bestimmten geraden Linie sind nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$y - q_1 - \varrho\cos\beta = \frac{\varrho\cos\beta - \varrho_1\cos\beta_1}{\varrho\cos\alpha - \varrho_1\cos\alpha_1}(x - p_1 - \varrho\cos\alpha),$$

$$z - r_1 - \varrho\cos\gamma = \frac{\varrho\cos\gamma - \varrho_1\cos\gamma_1}{\varrho\cos\alpha - \varrho_1\cos\alpha_1}(x - p_1 - \varrho\cos\alpha);$$

oder

$$y - q_1 - \varrho\cos\beta = \frac{\cos\beta - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\beta_1}{\cos\alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1}(x - p_1 - \varrho\cos\alpha),$$

$$z - r_1 - \varrho\cos\gamma = \frac{\cos\gamma - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\gamma_1}{\cos\alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1}(x - p_1 - \varrho\cos\alpha).$$

Soll nun diese gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei geraden Linien hinaus dargestellten geraden Linie parallel sein, so muss nach den Principien der analytischen Geometrie $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ so bestimmt werden, dass

$$\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\beta_1}{\cos\alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1},$$

$$\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\gamma - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\gamma_1}{\cos\alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho}\cos\alpha_1};$$

d. h., wie man hieraus leicht findet, dass

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1},$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'}{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = -\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'},$$

$$\frac{\varrho}{\varrho} = -\frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'}$$

ist.

Nach 35) ist

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'} = \frac{\cos\alpha'\cos\gamma_1 - \cos\gamma'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\alpha'},$$

und die beiden vorhergehenden Gleichungen werden sich also, wobei man zu beachten hat, dass $\frac{\varrho}{\varrho_1}$ seiner Natur nach eine positive Grösse ist, jederzeit zugleich erfüllen lassen, wenn

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}$$

eine negative Grösse ist; oder mit andern Worten:

Wenn die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\cos\beta_1 - \cos\beta'\cos\alpha_1}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}$$

negativ ist, so werden sich immer zwei Punkte, der eine in der

ersten, der andere in der dritten geraden Linie, von solcher Lage angeben lassen, dass die durch diese beiden Punkte der Lage nach bestimmte gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie parallel ist.

Nun wissen wir aber aus §. 4., dass sowohl im Falle der Reflexion, als auch im Falle der Refraction die erste und dritte gerade Linie, als einfallender und abgelenkter Strahl betrachtet, immer auf entgegengesetzten Seiten der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie liegen, und dass es also nie zwei in der ersten und dritten geraden Linie liegende Punkte von solcher Lage geben kann, dass die durch diese Punkte der Lage nach bestimmte gerade Linie der durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellten geraden Linie parallel ist, indem von jeder durch zwei in der ersten und dritten geraden Linie liegende Punkte gezogenen geraden Linie die durch das Einfallsloth und seine Verlängerung über den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt der drei Linien hinaus dargestellte gerade Linie offenbar nothwendig geschnitten werden muss. Daher kann weder im Falle der Reflexion, noch im Falle der Refraction die Grösse

$$\frac{\cos\alpha'\ \cos\beta_1 - \cos\beta'\ \cos\alpha_1}{\cos\alpha\ \cos\beta' - \cos\beta\ \cos\alpha'}$$

jemals negativ sein, und ist folglich in allen Fällen positiv. Hieraus, in Verbindung mit der ersten der Gleichungen 39) und der Gleichung 37), ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass sowohl bei der Reflexion, als auch bei der Refraction, nie $\mu = -\frac{1}{n}$ gesetzt werden darf, sondern immer

$$47)\ \mu = \frac{1}{n}$$

gesetzt werden muss, wie von nun an auch im Laufe der ganzen folgenden Untersuchung immer geschehen soll.

Aus den drei Gleichungen 45) folgt, wenn man dieselben nach der Reihe mit

$$\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'$$

multiplicirt und dann zu einander addirt:

$$\cos\alpha'\cos\alpha_1 + \cos\beta'\cos\beta_1 + \cos\gamma'\cos\gamma_1$$
$$= -\mu(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$
$$+ (\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2)(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich, weil

$$48)\quad \begin{cases} \cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \\ \cos\Theta_1 = \cos\alpha'\cos\alpha_1 + \cos\beta'\cos\beta_1 + \cos\gamma'\cos\gamma_1 \end{cases}$$

und

$$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1$$

ist:

$$\cos\Theta_1 = -\mu\cos\Theta + (\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

d. i.

$$49)\quad \cos\Theta_1 = \pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}.$$

Nun erhellet aber aus §. 4., dass bei der Reflexion die 180° nicht übersteigenden Winkel Θ und Θ_1 immer entweder beide kleiner oder beide grösser als 90° sind; dass dagegen bei der Refraction der eine dieser beiden 180° nicht übersteigenden Winkel immer kleiner als 90°, der andere grösser als 90° ist. Daher haben $\cos\Theta$ und $\cos\Theta_1$ bei der Reflexion immer gleiche, bei der Refraction immer ungleiche Vorzeichen, und es ergeben sich daher nach 49) jetzt die folgenden Regeln.

I. Reflexion.

1. Wenn $\Theta < 90°$, d. h. $\cos\Theta$ positiv ist, so ist auch $\Theta_1 < 90°$, d. h. $\cos\Theta_1$ positiv, und folglich

$$\cos\Theta_1 = +\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die obern Zeichen zu nehmen.

2. Wenn $\Theta > 90°$, d. h. $\cos\Theta$ negativ ist, so ist auch $\Theta_1 > 90°$, d. h. $\cos\Theta_1$ negativ, und folglich

$$\cos\Theta_1 = -\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die untern Zeichen zu nehmen.

II. Refraction.

1. Wenn $\Theta < 90°$, d. h. $\cos\Theta$ positiv ist, so ist $\Theta_1 > 90°$, d. h. $\cos\Theta_1$ negativ, und folglich

$$\cos\Theta_1 = -\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die untern Zeichen zu nehmen.

2. Wenn $\Theta > 90°$, d. h. $\cos\Theta$ negativ ist, so ist $\Theta_1 < 90°$, d. h. $\cos\Theta_1$ positiv, und folglich

$$\cos\Theta_1 = +\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

zu setzen, also in den obigen Formeln die obern Zeichen zu nehmen.

Wir sind daher durch die vorhergehende Untersuchung jetzt überhaupt zu dem folgenden Resultate gelangt:

Es ist

$$50)\quad \mu = \frac{1}{n}.$$

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

und

$$\cos\alpha_1 = -\mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\cos\beta_1 = -\mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

$$\cos\gamma_1 = -\mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$\frac{\cos\alpha_1 + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\beta_1 + \mu\cos\beta}{\cos\beta'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\gamma_1 + \mu\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

auch

$$\cos\Theta_1 = \pm\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2};$$

mit der Bestimmung, dass man in diesen Formeln im Falle der Reflexion die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\Theta < 90°$ oder $\Theta > 90°$ ist; im Falle der Refraction dagegen die obern oder untern Zeichen nehmen muss, jenachdem $\Theta > 90°$ oder $\Theta < 90°$ ist.

§. 8.

Im Folgenden wollen wir uns nun immer die erste gerade Linie als einen Theil eines nach einer gewissen Richtung hin

sich bewegenden, auf seinem Wege den vorher mit dem Namen des gemeinschaftlichen Ausgangspunkts der drei geraden Linien bezeichneten Punkt treffenden, und ausserdem durch einen gewissen Punkt, dessen Coordinaten p, q, r sein mögen, gehenden Strahls denken, und wollen, allen übrigen vorher eingeführten Symbolen die ihnen beigelegten Bedeutungen lassend, fernerhin die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte $(p\,q\,r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen der $x\,y\,z$ paralleler Axen einschliesst, durch α, β, γ bezeichnen. Nehmen wir dann aber, dies vorausgesetzt, immer den Theil dieses Strahls, welcher von dem vorher mit dem Namen des gemeinschaftlichen Ausgangspunkts der drei Linien bezeichneten Punkte an nach der Richtung hin liegt, die der Richtung der Bewegung des Strahls entgegengesetzt ist, als die erste der drei im Vorhergehenden betrachteten geraden Linien an; so müssen wir offenbar in allen obigen Formeln für α, β, γ respective $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ setzen, wodurch wir die folgenden Formeln erhalten.

Die Gleichungen der ersten geraden Linie sind wie früher:

$$51)\quad \frac{x - p_1}{\cos\alpha} = \frac{x - q_1}{\cos\beta} = \frac{z - r_1}{\cos\gamma},$$

oder auch

$$52)\quad \frac{x - p}{\cos\alpha} = \frac{y - q}{\cos\beta} = \frac{z - r}{\cos\gamma},$$

da der Punkt $(p\,q\,r)$ auch in der ersten, nöthigenfalls gehörig verlängert gedachten Linie liegt.

Ferner ist nach dem Obigen:

$$53)\quad \mu = \frac{1}{n},$$

$$\cos\Theta = -(\cos\alpha\,\cos\alpha' + \cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma')$$

und

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$\frac{\cos\alpha_1 - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\beta_1 - \mu\cos\beta}{\cos\beta'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2},$$

$$\frac{\cos\gamma_1 - \mu\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \mu\cos\Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2};$$

auch

$$\cos\Theta_1 = \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2};$$

mit der Bestimmung, dass man in diesen Formeln im Falle der Reflexion die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\Theta < 90°$ oder $\Theta > 90°$ ist; im Falle der Refraction dagegen die obern oder untern Zeichen nehmen muss, jenachdem $\Theta > 90°$ oder $\Theta < 90°$ ist.

§. 9.

Indem wir von jetzt an die erste gerade Linie immer den einfallenden Strahl, die dritte gerade Linie den abgelenkten Strahl (§. 4.) nennen werden, wollen wir nun zuvörderst annehmen, dass der, nöthigenfalls gehörig verlängert, durch den Punkt $(p\,q\,r)$ gehende einfallende Strahl eine Ebene, deren Gleichung im Allgemeinen

$$54) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

sein mag, in dem Punkte $(p_1\,q_1\,r_1)$ treffe, und unter diesen Voraussetzungen, allen übrigen im Vorhergehenden eingeführten Symbolen die ihnen beigelegten Bedeutungen lassend, die Lage des abgelenkten Strahles zu bestimmen suchen.

Da der Punkt $(p\,q\,r)$ in dem nöthigenfalls gehörig verlängerten einfallenden Strahle liegt, so haben wir nach 51) die beiden folgenden Gleichungen:

$$55) \quad \frac{p - p_1}{\cos\alpha} = \frac{q - q_1}{\cos\beta} = \frac{r - r_1}{\cos\gamma}.$$

Da ferner der Punkt $(p_1\,q_1\,r_1)$ in der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene liegt, so ist

$$56) \quad Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 + D = 0.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$57) \quad Ap + Bq + Cr + D = \Delta,$$

so ist

$$58) \quad A(p - p_1) + B(q - q_1) + C(r - r_1) = \Delta,$$

und folglich, wie man durch Verbindung dieser Gleichung mit den Gleichungen 55) leicht findet:

$$59)\quad \begin{cases} p - p_1 = \dfrac{\Delta \cos\alpha}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}, \\ q - q_1 = \dfrac{\Delta \cos\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}, \\ r - r_1 = \dfrac{\Delta \cos\gamma}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}; \end{cases}$$

also

$$60)\quad \begin{cases} p_1 = p - \dfrac{\Delta \cos\alpha}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}, \\ q_1 = q - \dfrac{\Delta \cos\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}, \\ r_1 = r - \dfrac{\Delta \cos\gamma}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}; \end{cases}$$

oder, wenn man den Werth von Δ aus 57) einführt:

$$61)\quad \begin{cases} p_1 = p - \dfrac{Ap + Bq + Cr + D}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\cos\alpha, \\ q_1 = q - \dfrac{Ap + Bq + Cr + D}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\cos\beta, \\ r_1 = r - \dfrac{Ap + Bq + Cr + D}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\cos\gamma; \end{cases}$$

oder auch:

$$61^*)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{B(p\cos\beta - q\cos\alpha) - C(r\cos\alpha - p\cos\gamma) - D\cos\alpha}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}, \\ q_1 = \dfrac{C(q\cos\gamma - r\cos\beta) - A(p\cos\beta - q\cos\alpha) - D\cos\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}, \\ r_1 = \dfrac{A(r\cos\alpha - p\cos\gamma) - B(q\cos\gamma - r\cos\beta) - D\cos\gamma}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}. \end{cases}$$

Die Gleichungen des Einfallslothes sind nach 29):

$$\frac{x - p_1}{\cos\alpha'} = \frac{y - q_1}{\cos\beta'} = \frac{z - r_1}{\cos\gamma_1}.$$

Weil dasselbe nun auf der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene senkrecht steht (§. 4.), so haben wir nach den Principien der analytischen Geometrie die drei folgenden Gleichungen:

$$62)\quad \begin{cases} A\cos\beta' = B\cos\alpha', \\ B\cos\gamma' = C\cos\beta', \\ C\cos\alpha' = A\cos\gamma'. \end{cases}$$

Verbindet man mit diesen Gleichungen, von denen jede eine Folge aus den beiden anderen ist, die bekannte Gleichung

$$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1;$$

so erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$63)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \pm \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\beta' = \pm \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\gamma' = \pm \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{cases}$$

Weil nun nach 53)

$$\cos\Theta = -(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$

ist, so ist

$$64)\quad \cos\Theta = \mp \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Weil nach dem Obigen

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = \frac{\Delta\cos\alpha}{p - p_1} = \frac{\Delta\cos\beta}{q - q_1} = \frac{\Delta\cos\gamma}{r - r_1}$$

und

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \pm \frac{A}{\cos\alpha'} = \pm \frac{B}{\cos\beta'} = \pm \frac{C}{\cos\gamma}$$

ist, so ist auch

$$65)\quad \cos\Theta = -\frac{\Delta}{A(p - p_1)}\cos\alpha\cos\alpha' = -\frac{\Delta}{B(q - q_1)}\cos\beta\cos\beta' = -\frac{\Delta}{C(r - r_1)}\cos\gamma\cos\gamma';$$

oder, wenn wir den Werth von Δ aus 58) in diese Gleichungen einführen:

$$66)\ \cos\Theta = -\left(1 + \frac{B}{A}\cdot\frac{q-q_1}{p-p_1} + \frac{C}{A}\cdot\frac{r-r_1}{p-p_1}\right)\cos\alpha\,\cos\alpha'$$

$$= -\left(1 + \frac{C}{B}\cdot\frac{r-r_1}{q-q_1} + \frac{A}{B}\cdot\frac{p-p_1}{q-q_1}\right)\cos\beta\,\cos\beta'$$

$$= -\left(1 + \frac{A}{C}\cdot\frac{p-p_1}{r-r_1} + \frac{B}{C}\cdot\frac{q-q_1}{r-r_1}\right)\cos\gamma\,\cos\gamma'.$$

Nehmen wir nun, wie auch schon in §. 4. vorgeschrieben worden ist, das Einfallsloth mit dem einfallenden Strahle immer auf derselben Seite der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene an, so kann Θ nie ein stumpfer Winkel sein, und $\cos\Theta$ ist daher unter dieser Voraussetzung stets positiv. Also sind zufolge der Gleichung 64) in allen obigen Formeln die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem die Grösse

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma$$

negativ oder positiv ist. Liegt aber der Punkt $(p\ q\ r)$ in dem einfallenden Strahle selbst, so ist offenbar, wenn ϱ die Entfernung der beiden Punkte $(p\ q\ r)$ und $(p_1\ q_1\ r_1)$ von einander bezeichnet, in völliger Allgemeinheit

$$p_1 = p + \varrho\cos\alpha,\ q_1 = q + \varrho\cos\beta,\ r_1 = r + \varrho\cos\gamma;$$

also nach 59)

$$\varrho = -\frac{\Delta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma},$$

und folglich, weil ϱ seiner Natur nach positiv ist,

$$\frac{\Delta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}$$

eine negative Grösse, d. h. die beiden Grössen

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma \text{ und } \Delta$$

haben entgegengesetzte Vorzeichen. Daher muss man in diesem Falle in allen obigen Formeln die obern oder untern Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\Delta = Ap + Bq + Cr + D$$

positiv oder negativ ist.

Liegt dagegen der Punkt $(p\ q\ r)$ in der Verlängerung des einfallenden Strahls über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus, so ist, wenn

wieder ϱ die Entfernung der beiden Punkte $(p\ q\ r)$ und $(p_1\ q_1\ r_1)$ von einander bezeichnet, in völliger Allgemeinheit

$$p = p_1 + \varrho \cos\alpha,\ q = q_1 + \varrho \cos\beta,\ r = r_1 + \varrho \cos\gamma;$$

also nach 59)

$$\varrho = \frac{\Delta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma},$$

und folglich, weil ϱ seiner Natur nach positiv ist,

$$\frac{\Delta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}$$

eine positive Grösse, d. h. die beiden Grössen

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma \text{ und } \Delta$$

haben gleiche Vorzeichen. Daher muss man in diesem Falle in allen obigen Formeln die obern oder untern Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\Delta = Ap + Bq + Cr + D$$

negativ oder positiv ist.

Bevor wir diese Betrachtungen weiter fortführen, wollen wir zuerst den folgenden Lehrsatz beweisen.

Lehrsatz. Wenn $(p'\ q'\ r')$ und $(p''\ q''\ r'')$ zwei beliebige Punkte sind, so haben, jenachdem diese beiden Punkte auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen, die Grössen

$$Ap' + Bq' + Cr' + D$$

und

$$Ap'' + Bq'' + Cr'' + D$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen und umgekehrt.

Beweis. Die Gleichungen der durch die Punkte $(p'\ q'\ r')$ und $(p''\ q''\ r'')$ gelegten, der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene parallelen Ebenen sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$A(x - p') + B(y - q') + C(z - r') = 0$$

und

$$A\,(x - p'') + B\,(y - q'') + C\,(z - r'') = 0.$$

Eine der drei Coordinatenaxen wird von den drei in Rede stehenden, einander parallelen Ebenen immer geschnitten. Diese Coordinatenaxe sei daher, um die Begriffe zu fixiren, die Axe der x, und ξ, ξ', ξ'' seien respective die x der drei Durchschnittspunkte der drei einander parallelen Ebenen mit der Axe der x; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} A\xi + D &= 0, \\ A\,(\xi' - p') - Bq' - Cr' &= 0, \\ A\,(\xi'' - p'') - Bq'' - Cr'' &= 0; \end{aligned}$$

also

$$\xi = -\frac{D}{A},$$

$$\xi' = \frac{Ap' + Bp' + Cr'}{A},$$

$$\xi'' = \frac{Ap'' + Bq'' + Cr''}{A}.$$

Liegen nun die beiden Punkte $(p'\ q'\ r')$ und $(p''\ q''\ r'')$ auf derselben Seite der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene, so ist offenbar jederzeit mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\xi' \gtrless \xi, \quad \xi'' \gtrless \xi;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{Ap' + Bq' + Cr'}{A} \gtrless -\frac{D}{A},$$

$$\frac{Ap'' + Bq'' + Cr''}{A} \gtrless -\frac{D}{A};$$

oder

$$\frac{Ap' + Bq' + Cr' + D}{A} \gtrless 0,$$

$$\frac{Ap'' + Bq'' + Cr'' + D}{A} \gtrless 0;$$

und folglich jederzeit

$$\frac{(Ap' + Bq' + Cr' + D)\ (Ap'' + Bq'' + Cr'' + D)}{A^2} > 0,$$

also

$$(Ap' + Bq' + Cr' + D)\ (Ap'' + Bq'' + Cr'' + D) > 0,$$

woraus sich ergiebt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Grössen

$$Ap' + Bq' + Cr' + D$$

und

$$Ap'' + Bq'' + Cr'' + D$$

gleiche Vorzeichen haben.

Liegen die beiden Punkte $(p'\ q'\ r')$ und $(p''\ q''\ r'')$ auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene, so ist offenbar jederzeit mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\xi' \gtrless \xi,\quad \xi'' \lessgtr \xi;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{Ap' + Bq' + Cr'}{A} \gtrless -\frac{D}{A},$$

$$\frac{Ap'' + Bq'' + Cr''}{A} \lessgtr -\frac{D}{A};$$

oder

$$\frac{Ap' + Bq' + Cr' + D}{A} \gtrless 0,$$

$$\frac{Ap'' + Bq'' + Cr'' + D}{A} \lessgtr 0;$$

und folglich jederzeit

$$\frac{(Ap' + Bq' + Cr' + D)\ (Ap'' + Bq'' + Cr'' + D)}{A^2} < 0,$$

also

$$(Ap' + Bq' + Cr' + D)\ (Ap'' + Bq'' + Cr'' + D) < 0,$$

woraus sich ergiebt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Grössen

$$Ap' + Bq' + Cr' + D$$

und

$$Ap'' + Bq'' + Cr'' + D$$

entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Der umgekehrte Satz folgt hieraus unmittelbar von selbst.

Kehren wir nach dieser Abschweifung nun wieder zu unsern obigen Betrachtungen zurück, so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze, dass, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\,q\,r)$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen, die Grössen

$$D \text{ und } \Delta = Ap + Bq + Cr + D$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, und umgekehrt. Nehmen wir also, was offenbar verstattet ist, die Grösse D immer als positiv an, so ist die Grösse

$$\Delta = Ap + Bq + Cr + D$$

positiv oder negativ, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\,q\,r)$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen.

Wenn daher der Punkt $(p\,q\,r)$ in dem einfallenden Strahle selbst liegt, so muss man in allen obigen Formeln die obern oder untern Zeichen nehmen, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\,q\,r)$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen.

Wenn dagegen der Punkt $(p\,q\,r)$ in der Verlängerung des einfallenden Strahls über den Punkt $(p_1\,q_1\,r_1)$ hinaus liegt, so muss man in allen obigen Formeln die obern oder untern Zeichen nehmen, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\,q\,r)$ auf entgegengesetzten Seiten oder auf derselben Seite der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen.

Nimmt man also den Punkt $(p\ q\ r)$ selbst als Anfang der Coordinaten an, so muss man in allen obigen Formeln in dem ersten der beiden vorher unterschiedenen Fälle die obern, in dem zweiten dieser beiden Fälle dagegen die untern Zeichen nehmen.

Zur Bestimmung der Winkel α_1, β_1, γ_1 hat man nach 53) die Formeln:

$$67)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}), \\ \cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}), \\ \cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}); \end{cases}$$

in denen, da in Folge der gemachten Voraussetzungen jetzt immer $\Theta < 90°$ ist, nach §. 8. jederzeit im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen genommen werden müssen.

Bis jetzt ist μ immer als positiv betrachtet worden. Nimmt man nun aber μ im Falle der Reflexion stets positiv, im Falle der Refraction stets negativ, und bezeichnet den absoluten Werth von μ in allen Fällen durch (μ), so ist nach dem Vorhergehenden offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$68)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = \cos\alpha + \cos\alpha'(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}), \\ \dfrac{\cos\beta_1}{(\mu)} = \cos\beta + \cos\beta'(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}), \\ \dfrac{\cos\gamma_1}{(\mu)} = \cos\gamma + \cos\gamma'(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}). \end{cases}$$

Die Gleichungen des abgelenkten Strahls sind

$$69)\quad \frac{x-p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y'-q_1}{\cos\beta_1} = \frac{z-r_1}{\cos\gamma_1},$$

und können nun offenbar als vollständig entwickelt betrachtet werden.

Die Gleichungen des von dem Punkte $(p\ q\ r)$ auf die durch die Gleichung 54) charakterisirte Ebene gefällten Perpendikels sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$70)\quad \frac{x-p}{A} = \frac{y-q}{B} = \frac{z-r}{C},$$

und wenn wir die Entfernung des Punktes $(p\ q\ r)$ von der in Rede stehenden Ebene durch E bezeichnen, so ist

$$71)\quad E^2 = \frac{(Ap + Bq + Cr + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{\Delta^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Weil nun nach dem Obigen unter den gemachten Voraussetzungen die Grösse

$$\Delta = Ap + Bq + Cr + D$$

positiv oder negativ ist, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\ q\ r)$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene liegen, die Entfernung E aber natürlich immer als positiv betrachtet werden muss, so ist

$$72)\quad E = \pm\frac{Ap + Bq + Cr + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{\Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

indem man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\ q\ r)$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene liegen.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch den abgelenkten Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus dargestellten geraden Linie mit dem von dem Punkte $(p\ q\ r)$ auf die durch die Gleichung 54) charakterisirte Ebene gefällten Perpendikel durch $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $r^{(1)}$, und die Entfernung dieses Punktes von der in Rede stehenden Ebene durch $E^{(1)}$; so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $r^{(1)}$ nach dem Obigen die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{p^{(1)} - p}{A} = \frac{q^{(1)} - q}{B} = \frac{r^{(1)} - r}{C},$$

$$\frac{p^{(1)} - p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{q^{(1)} - q_1}{\cos\beta_1} = \frac{r^{(1)} - r_1}{\cos\gamma_1};$$

oder

$$\frac{p^{(1)} - p_1 - (p - p_1)}{A} = \frac{q^{(1)} - q_1 - (q - q_1)}{B} = \frac{r^{(1)} - r_1 - (r - r_1)}{C},$$

$$\frac{p^{(1)} - p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{q^{(1)} - q_1}{\cos\beta_1} = \frac{r^{(1)} - r_1}{\cos\gamma_1}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn der Kürze wegen

$$73)\quad \Omega = \frac{A(q-q_1) - B(p-p_1)}{A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1}$$

$$= \frac{B(r-r_1) - C(q-q_1)}{B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1}$$

$$= \frac{C(p-p_1) - A(r-r_1)}{C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1}$$

gesetzt wird:

$$74)\quad \frac{p^{(1)}-p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{q^{(1)}-q_1}{\cos\beta_1} = \frac{r^{(1)}-r_1}{\cos\gamma_1} = \Omega,$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $r^{(1)}$ bestimmt werden können.

Nach 59) ist nun

$$A(q-q_1) - B(p-p_1) = \frac{A\cos\beta - B\cos\alpha}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\,\Delta,$$

und nach 68) ist

$$\frac{A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1}{(\mu)} = A\cos\beta - B\cos\alpha$$

$$+ (A\cos\beta' - B\cos\alpha')\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also nach 62)

$$A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1 = (\mu)(A\cos\beta - B\cos\alpha).$$

Folglich ist nach 73)

$$75)\quad \Omega = \frac{\Delta}{(\mu)(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)},$$

und daher nach 74)

$$76)\quad \frac{p^{(1)}-p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{q^{(1)}-q_1}{\cos\beta_1} = \frac{r^{(1)}-r_1}{\cos\gamma_1} = \frac{\Delta}{(\mu)(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)}.$$

Nach 59) kann man diese Gleichungen auch unter der folgenden Form darstellen:

$$\frac{p^{(1)}-p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{p-p_1}{\cos\alpha},$$

$$\frac{q^{(1)}-q_1}{\cos\beta_1} = \frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{q-q_1}{\cos\beta},$$

$$\frac{r^{(1)}-r_1}{\cos\gamma_1} = \frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{r-r_1}{\cos\gamma};$$

also

$$77)\quad \begin{cases} p^{(1)} = p_1 + \dfrac{1}{(\mu)} \cdot \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}\,(p - p_1), \\ q^{(1)} = q_1 + \dfrac{1}{(\mu)} \cdot \dfrac{\cos\beta_1}{\cos\beta}\,(q - q_1), \\ r^{(1)} = r_1 + \dfrac{1}{(\mu)} \cdot \dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma}\,(r - r_1). \end{cases}$$

Auch ist

$$\frac{p^{(1)} - p - (p_1 - p)}{\cos\alpha_1} = \frac{q^{(1)} - q - (q_1 - q)}{\cos\beta_1} = \frac{r^{(1)} - r - (r_1 - r)}{\cos\gamma_1}$$
$$= \frac{\Delta}{(\mu)\,(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)},$$

und folglich

$$p^{(1)} - p = p_1 - p + \frac{\Delta\cos\alpha_1}{(\mu)\,(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)},$$

$$q^{(1)} - q = q_1 - q + \frac{\Delta\cos\beta_1}{(\mu)\,(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)},$$

$$r^{(1)} - r = r_1 - r + \frac{\Delta\cos\gamma_1}{(\mu)\,(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)};$$

also, wenn man für die Grössen $p_1 - p$, $q_1 - q$, $r_1 - r$ ihre aus 59) bekannten Werthe einführt:

$$p^{(1)} - p = \frac{\dfrac{\cos\alpha_1}{(\mu)} - \cos\alpha}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\,\Delta,$$

$$q^{(1)} - q = \frac{\dfrac{\cos\beta_1}{(\mu)} - \cos\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\,\Delta,$$

$$r^{(1)} - r = \frac{\dfrac{\cos\gamma_1}{(\mu)} - \cos\gamma}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\,\Delta.$$

Führt man nun aber für

$$\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)},\quad \frac{\cos\beta_1}{(\mu)},\quad \frac{\cos\gamma_1}{(\mu)}$$

ihre aus 68) bekannten Werthe ein, so erhält man:

$$78)\quad \begin{cases} p^{(1)} - p = \dfrac{\cos\alpha' \left(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\,\Delta, \\ q^{(1)} - q = \dfrac{\cos\beta' \left(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\,\Delta, \\ r^{(1)} - r = \dfrac{\cos\gamma' \left(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\,\Delta; \end{cases}$$

in welche Ausdrücke man nun auch noch für $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ ihre aus 63) bekannten Werthe einführen könnte.

Bekanntlich ist

$$(E^{(1)})^2 = \frac{(Ap^{(1)} + Bq^{(1)} + Cr^{(1)} + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

oder, weil

$$Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 + D = 0$$

ist,

$$(E^{(1)})^2 = \frac{[A(p^{(1)} - p_1) + B(q^{(1)} - q_1) + C(r^{(1)} - r_1)]^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Folglich ist nach 75) und 76), wie man leicht findet:

$$(E^{(1)})^2 = \left(\frac{A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,\Omega\right)^2.$$

Nach 68) ist aber

$$\frac{A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1}{(\mu)}$$

$$= A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma$$

$$+ (A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma')\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also, weil nach 64) und 63)

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = \mp\cos\Theta\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und

$$A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

ist:

$$\frac{A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{(\mu)}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$(E^{(1)})^2 = \Omega^2\ (1 - \mu^2 \sin\Theta^2).$$

Wenn der Punkt $(p\ q\ r)$ in dem einfallenden Strahle selbst liegt, so haben nach dem Obigen die Grössen

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma \text{ und } \Delta$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und nach 75) ist also in diesem Falle Ω stets eine negative Grösse. Daher ist

$$79)\quad E^{(1)} = -\Omega\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}$$

oder

$$80)\quad E^{(1)} = -\frac{\Delta\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}}{(\mu)(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)}.$$

Nach 72) und 80) ist

$$\frac{E}{E^{(1)}} = \mp\frac{(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}} \cdot \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\ q\ r)$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene liegen.

Wenn der Punkt $(p\ q\ r)$ in der Verlängerung des einfallenden Strahls über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus liegt, so haben nach dem Obigen die Grössen

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma \text{ und } \Delta$$

gleiche Vorzeichen, und nach 75) ist also in diesem Falle Ω stets eine positive Grösse. Daher ist

$$79^*)\quad E^{(1)} = \Omega\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}$$

oder

$$80^*)\quad E^{(1)} = \frac{\Delta\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}}{(\mu)(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)}.$$

Nach 72) und 80*) ist

$$\frac{E}{E^{(1)}} = \pm\frac{(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}} \cdot \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo wieder das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\ q\ r)$ auf der-

selben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene liegen.

Wenn nun aber der Punkt $(p\ q\ r)$ in dem einfallenden Strahle selbst liegt, so ist nach 64)

$$\cos\Theta = \mp \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und wenn der Punkt $(p\ q\ r)$ in der Verlängerung des einfallenden Strahls über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus liegt, so ist nach 64)

$$\cos\Theta = \pm \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

indem man immer die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt $(p\ q\ r)$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung 54) charakterisirten Ebene liegen.

Folglich ist nach dem Vorhergehenden offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$81)\quad \frac{E}{E} = \frac{(\mu)\ \cos\Theta}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}}.$$

Wenn sich Θ der Null, d. h. wenn sich der einfallende Strahl dem von dem Punkte $(p\ q\ r)$ auf die durch die Gleichung 54) charakterisirte Ebene gefällten Perpendikel nähert, so nähert sich der Bruch

$$\frac{E}{E^{(1)}}$$

der Gränze (μ), also $E^{(1)}$ der Gränze

$$\frac{E}{(\mu)}.$$

Für $\mu = +1$ ist nach 78)

$$p^{(1)} - p = -\frac{2\cos\alpha'\ \cos\Theta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\Delta,$$

$$q^{(1)} - q = -\frac{2\cos\beta'\ \cos\Theta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\Delta,$$

$$r^{(1)} - r = -\frac{2\cos\gamma'\ \cos\Theta}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}\Delta;$$

also nach 64)

$$p^{(1)} - p = \mp \frac{2\cos\alpha'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Delta,$$

$$q^{(1)} - q = \mp \frac{2\cos\beta'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Delta,$$

$$r^{(1)} - r = \mp \frac{2\cos\gamma'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Delta;$$

und folglich nach 63):

$$82)\quad \begin{cases} p^{(1)} - p = -\dfrac{2A\Delta}{A^2+B^2+C^2} = -\dfrac{2A(Ap+Bq+Cr+D)}{A^2+B^2+C^2} \\ q^{(1)} - q = -\dfrac{2B\Delta}{A^2+B^2+C^2} = -\dfrac{2B(Ap+Bq+Cr+D)}{A^2+B^2+C^2}, \\ r^{(1)} - r = -\dfrac{2C\Delta}{A^2+B^2+C^2} = -\dfrac{2C(Ap+Bq+Cr+D)}{A^2+B^2+C^2}; \end{cases}$$

also

$$83)\quad \begin{cases} p^{(1)} = p - \dfrac{2A(Ap+Bq+Cr+D)}{A^2+B^2+C^2}, \\ q^{(1)} = q - \dfrac{2B(Ap+Bq+Cr+D)}{A^2+B^2+C^2}, \\ r^{(1)} = r - \dfrac{2C(Ap+Bq+Cr+D)}{A^2+B^2+C^2}. \end{cases}$$

Weil diese Ausdrücke der Coordinaten $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $r^{(1)}$ von den Winkeln α, β, γ ganz unabhängig sind, so erhellet, dass in diesem Falle die geraden Linien, in denen alle, nöthigenfalls gehörig verlängert, durch den Punkt $(p\,q\,r)$ gehenden einfallenden Strahlen liegen, sich nach ihrer Reflexion bei der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene sämmtlich in dem Punkte $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ des von dem Punkte $(p\,q\,r)$ auf diese Ebene gefällten Perpendikels mit einander vereinigen.

Aus den Gleichungen 83) folgt

$$Ap^{(1)} + Bq^{(1)} + Cr^{(1)} = Ap + Bq + Cr - 2(Ap + Bq + Cr + D),$$

also

$$Ap^{(1)} + Bq^{(1)} + Cr^{(1)} + D = -(Ap + Bq + Cr + D),$$

woraus sich mit Hülfe des oben bewiesenen Lehrsatzes ergiebt, dass die Punkte $(p\ q\ r)$ und $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ immer auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen.

Aus der Gleichung 81) folgt

$$E = E^{(1)},$$

so dass also die beiden auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegenden Punkte $(p\ q\ r)$ und $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ von dieser Ebene gleich weit entfernt sind.

Aus allem Vorhergehenden erhellet zugleich, wie man, wenn der Punkt $(p\ q\ r)$ gegeben ist, den Punkt $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ immer leicht durch Construction finden kann.

Für $\mu = -1$ folgt aus den Formeln 78) sogleich

$$p^{(1)} = p,\ q^{(1)} = q,\ r^{(1)} = r;$$

und aus der Gleichung 81) ergiebt sich, wie es hiernach erforderlich ist,

$$E^{(1)} = E.$$

Die Deutung dieser Resultate fällt sogleich von selbst in die Augen, und bedarf keiner weitern Erläuterung.

§. 10.

Wir wollen nun eine Kugelfläche betrachten, welche, wenn wir durch a_1, b_1, c_1 die Coordinaten des Mittelpunkts und durch R_1 den Halbmesser derselben bezeichnen, bekanntlich durch die Gleichung

$$84)\quad (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = R_1^2$$

charakterisirt wird.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der geraden Linie, in welcher der, nöthigenfalls gehörig verlängert, durch den Punkt $(p\ q\ r)$ gehende einfallende Strahl liegt, mit dieser Kugelfläche, d. h. die Coordinaten des Einfallspunkts, wieder durch p_1, q_1, r_1; so haben wir zu deren Bestimmung nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = \frac{q_1 - q}{\cos\beta} = \frac{r_1 - r}{\cos\gamma},$$

$$(p_1 - a_1)^2 + (q_1 - b_1)^2 + (r_1 - c_1)^2 = R_1^2;$$

oder

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = \frac{q_1 - q}{\cos\beta} = \frac{r_1 - r}{\cos\gamma},$$

$$\left.\begin{aligned} &\{p_1 - p - (a_1 - p)\}^2 \\ +\ &\{q_1 - q - (b_1 - q)\}^2 \\ +\ &\{r_1 - r - (c_1 - r)\}^2 \end{aligned}\right\} = R_1^2.$$

Weil nun wegen der zwei ersten Gleichungen

$$q_1 - q - (b_1 - q) = \frac{(p_1 - p)\cos\beta - (b_1 - q)\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

$$r_1 - r - (c_1 - r) = \frac{(p_1 - p)\cos\gamma - (c_1 - r)\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

ist, so ist wegen der dritten Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\{p_1 - p - (a_1 - p)\}^2 \cos\alpha^2 \\ +\ &\{(p_1 - p)\cos\beta - (b_1 - q)\cos\alpha\}^2 \\ +\ &\{(p_1 - p)\cos\gamma - (c_1 - r)\cos\alpha\}^2 \end{aligned}\right\} = R_1^2 \cos\alpha^2;$$

also, weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist:

$$(p_1 - p)^2 - 2\{(a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\cos\beta + (c_1 - r)\cos\gamma\}(p_1 - p)\cos\alpha$$
$$= \left\{R_1^2 - [(a_1 - p)^2 + (b_1 - q)^2 + (c_1 - r)^2]\right\}\cos\alpha^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$85)\quad \begin{cases} E_1 = \sqrt{(a_1 - p)^2 + (b_1 - q)^2 + (c_1 - r)^2}, \\ K_1 = (a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\cos\beta + (c_1 - r)\cos\gamma \end{cases}$$

setzen, wo E_1 bekanntlich die Entfernung des Punktes $(p\ q\ r)$ von dem Mittelpunkte $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche ist:

$$(p_1 - p)^2 - 2K_1(p_1 - p)\cos\alpha = (R_1^2 - E_1^2)\cos\alpha^2.$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhalten wir

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2},$$

und nach dem Obigen haben wir daher überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$86)\quad \begin{cases} \dfrac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2}, \\ \dfrac{q_1 - q}{\cos\beta} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2}, \\ \dfrac{r_1 - r}{\cos\gamma} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2}; \end{cases}$$

wo natürlich die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

Nehmen wir nun für's Erste den nach dem Punkte $(p_1\ q_1\ r_1)$ gezogenen Halbmesser der gegebenen Kugelfläche als Einfallsloth an; so haben wir offenbar die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 - p_1 &= R_1 \cos\alpha', \\ b_1 - q_1 &= R_1 \cos\beta', \\ c_1 - r_1 &= R_1 \cos\gamma'; \end{aligned}$$

also

$$87)\quad \cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},\ \cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},\ \cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1};$$

und folglich nach 86):

$$88)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a_1 - p - (K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2})\cos\alpha}{R_1}, \\ \cos\beta' = \dfrac{b_1 - q - (K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2})\cos\beta}{R_1}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c_1 - r - (K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2})\cos\gamma}{R_1}. \end{cases}$$

Weil nach 53)

$$\cos\Theta = -(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$

ist, so erhalten wir aus 85) und 88) mit Hülfe der bekannten Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

leicht:

$$89) \quad \cos\Theta = \pm \frac{\sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2}}{R_1}.$$

Jenachdem nun die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche der Richtung, nach welcher der durch den Punkt $(p\,q\,r)$ gehende Strahl, von dem der einfallende Strahl ein Theil ist, sich bewegt, zugekehrt ist, wollen wir im Folgenden sagen, dass der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite dieser Kugelfläche treffe. Dies vorausgesetzt ist daher offenbar, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite trifft, immer $\Theta < 90°$ oder $\Theta > 90°$, und nach §. 8. sind also in den Formeln

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

im Falle der Reflexion die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft; dagegen sind im Falle der Refraction in diesen Formeln die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die convexe oder concave Seite der gegebenen Kugelfläche trifft.

Nehmen wir nun aber, wie auch schon in §. 4. im Allgemeinen vorgeschrieben worden ist, im Folgenden das Einfallsloth mit dem einfallenden Strahle immer auf einer Seite der gegebenen Kugelfläche an, so muss man in dem Falle, wo der einfallende Strahl deren convexe Seite trifft, offenbar in den obigen Formeln für

$$\Theta \text{ und } \alpha', \beta', \gamma'$$

respective

$$180° - \Theta \text{ und } 180° - \alpha', 180° - \beta', 180° - \gamma'$$

setzen, wodurch in diesem Falle die in Rede stehenden Formeln*) in die folgenden übergehen:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'\,(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'\,(\mu\cos\Theta \mp \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

---

*) Der oben in 53) für $\cos\Theta$ gegebene Ausdruck bleibt ungeändert.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist daher allgemein im Falle der Reflexion:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'\,(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'\,(\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

und im Falle der Refraction:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'\,(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'\,(\mu\cos\Theta - \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Also ist, wenn man immer im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen nimmt:

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\cos\beta_1 = \mu\cos\beta + \cos\beta'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$
$$\cos\gamma_1 = \mu\cos\gamma + \cos\gamma'\,(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Betrachtet man nun aber μ, welches bisher immer als positiv angenommen worden ist, im Falle der Reflexion als positiv, im Falle der Refraction als negativ, und bezeichnet den absoluten Werth von μ wie schon früher auch jetzt wieder durch (μ); so ist in völliger Allgemeinheit:

$$90)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = \cos\alpha + \cos\alpha'\,(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}), \\ \dfrac{\cos\beta_1}{(\mu)} = \cos\beta + \cos\beta'\,(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}). \\ \dfrac{\cos\gamma_1}{(\mu)} = \cos\gamma + \cos\gamma'\,(\cos\Theta + \dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}). \end{cases}$$

In der Gleichung 89) ist offenbar das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft. Also sind auch in den aus 86) bekannten Formeln

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2},$$

$$\frac{q_1 - q}{\cos\beta} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2},$$

$$\frac{r_1 - r}{\cos\gamma} = K_1 \pm \sqrt{R_1^2 + K_1^2 - E_1^2};$$

oder in den Formeln

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 \pm R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\frac{q_1 - q}{\cos\beta} = K_1 \pm R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}},$$

$$\frac{r_1 - r}{\cos\gamma} = K_1 \pm R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}$$

die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft. Nehmen wir nun aber den Halbmesser R_1 positiv oder negativ, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft; so können wir allgemein

$$\begin{cases} \frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}, \\ \frac{q_1 - q}{\cos\beta} = K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}, \\ \frac{r_1 - r}{\cos\gamma} = K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}} \end{cases}$$

oder

$$92) \quad \begin{cases} p_1 - p + \left(K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}\right) \cos\alpha, \\ q_1 = q + \left(K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}\right) \cos\beta, \\ r_1 = r + \left(K_1 + R_1 \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}\right) \cos\gamma \end{cases}$$

setzen.

Halten wir die vorher wegen des Einfallsloths gegebene Bestimmung fest, so ist offenbar, wenn man R_1 immer als positiv betrachtet,

$$R_1 \cos\alpha' = a_1 - p_1$$
$$R_1 \cos\beta' = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos\gamma' = c_1 - r_1$$

oder

$$R_1 \cos(180^\circ - \alpha') = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos(180^\circ - \beta') = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos(180^\circ - \gamma') = c_1 - r_1;$$

jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft; und folglich

$$\pm R_1 \cos\alpha' = a_1 - p_1,$$
$$\pm R_1 \cos\beta' = b_1 - q_1,$$
$$\pm R_1 \cos\gamma' = c_1 - r_1;$$

wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft. Nimmt man aber wie vorher den Halbmesser R_1 positiv oder negativ, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite der gegebenen Kugelfläche trifft, so ist allgemein

$$R_1 \cos\alpha' = a_1 - p_1,$$
$$R_1 \cos\beta' = b_1 - q_1,$$
$$R_1 \cos\gamma' = c_1 - r_1;$$

also

93) $$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},\quad \cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},\quad \cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1};$$

und folglich nach 92):

94)
$$\begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a_1 - p - \left(K_1 + R_1\sqrt{1 - \dfrac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}\right)\cos\alpha}{R_1}, \\ \cos\beta' = \dfrac{b_1 - q - \left(K_1 + R_1\sqrt{1 - \dfrac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}\right)\cos\beta}{R_1}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c_1 - r - \left(K_1 + R_1\sqrt{1 - \dfrac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}\right)\cos\gamma}{R_1}; \end{cases}$$

oder

$$95)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a_1 - p - K_1\cos\alpha}{R_1} - \cos\alpha\sqrt{1 - \dfrac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{b_1 - q - K_1\cos\beta}{R_1} - \cos\beta\sqrt{1 - \dfrac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c_1 - r - K_1\cos\gamma}{R_1} - \cos\gamma\sqrt{1 - \dfrac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}. \end{cases}$$

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$\cos\Theta = -(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$

ist, so erhält man aus den vorhergehenden Formeln leicht:

$$96)\quad \cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}$$

oder

$$97)\quad \cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}},$$

und folglich

$$98)\quad \sin\Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}};$$

also nach dem Obigen auch

$$99)\quad \begin{cases} p_1 = p + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha, \\ q_1 = q + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\beta, \\ r_1 = r + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\gamma. \end{cases}$$

§. 11.

Wir wollen nun besserer Uebersicht wegen die im Vorhergehenden entwickelten Formeln zur Bestimmung der Lage des abgelenkten Strahls nochmals zusammenstellen, und dieselben mit einigen die Erleichterung der Rechnung nach diesen Formeln betreffenden Bemerkungen begleiten.

Zum Grunde gelegt wird ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der $x\ y\ z$.

Gegeben sind:

die Coordinaten p, q, r des Punktes $(p\ q\ r)$, durch welchen der nöthigenfalls gehörig verlängerte einfallende Strahl geht;

ferner die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ, welche der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls, von welchem der einfallende Strahl ein Theil ist, ausgehende Theil des ersteren mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(p\ q\ r)$ gelegter, den primitiven Axen der $x\ y\ z$ paralleler Axen einschliesst;

endlich die Gleichung der zurückwerfenden oder brechenden Kugelfläche, nämlich die Gleichung

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - r_1)^2 = R_1^2,$$

wo der Halbmesser R_1 als positiv oder als negativ betrachtet wird, jenachdem der Strahl, von welchem der einfallende Strahl ein Theil ist, die concave oder convexe Seite dieser Kugelfläche trifft.

Gesucht werden

die Coordinaten p_1, q_1, r_1 des Einfallspunkts, in welchem der einfallende Strahl die gegebene Kugelfläche trifft, und die 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1, γ_1, welche der von dem Punkte $(p_1\ q_1\ r_1)$ ausgehende abgelenkte Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ gelegter, den primitiven Axen der $x\ y\ z$ paralleler Axen einschliesst.

Zur Berechnung dieser sechs Grössen, durch welche die Lage des abgelenkten Strahls offenbar vollkommen bestimmt wird, hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln.

Zuerst berechnet man die Grössen E_1 und K_1 mittelst der Formeln

$$E_1 = \sqrt{(a_1 - p)^2 + (b_1 - q)^2 + (c_1 - r)^2},$$
$$K_1 = (a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\cos\beta + (c_1 - r)\cos\gamma;$$

und hierauf den Winkel Θ mittelst der Formeln

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}}$$

oder

$$\sin\Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}},$$

wo aus der ersten dieser beiden Formeln sogleich erhellet, dass der bekanntlich 180° nicht übersteigende Winkel Θ niemals grösser als 90° ist, was sich nach der aus dem Obigen bekannten Annahme des Einfallsloths auch von selbst versteht.

Dann ergeben sich die Coordinaten p_1, q_1, r_1 mittelst der Formeln:

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos\Theta) \cos\alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos\Theta) \cos\beta,$$
$$r_1 = r + (K_1 + R_1 \cos\Theta) \cos\gamma;$$

und hierauf die 180° nicht übersteigenden Winkel α', β', γ mittelst der Formeln:

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1}.$$

Endlich erhält man die 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1, γ_1 mittelst der Formeln:

$$\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = \cos\alpha + \cos\alpha' \left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}\right),$$
$$\frac{\cos\beta_1}{(\mu)} = \cos\beta + \cos\beta' \left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}\right),$$
$$\frac{\cos\gamma_1}{(\mu)} = \cos\gamma + \cos\gamma' \left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}\right);$$

wo bekanntlich (μ) den absoluten Werth von μ bezeichnet, welches im Falle der Reflexion stets positiv, im Falle der Refraction stets negativ genommen wird.

Berechnet man die Hülfswinkel φ und ψ mittelst der Formeln

$$tang\,\varphi = \frac{c_1 - r}{b_1 - q},$$

$$tang\,\psi = \frac{b_1 - q}{(a_1 - p)\cos\varphi} = \frac{c_1 - r}{(a_1 - p)\sin\varphi},$$

so ist, wie man leicht findet:

$$E_1^2 = \left(\frac{a_1 - p}{\cos\psi}\right)^2.$$

Nimmt man aber, was offenbar verstattet ist, wenn

$b_1 - q$	und	$c_1 - r$
positiv		positiv
negativ		positiv
negativ		negativ
positiv		negativ

ist, φ so, dass respective

$$0 < \varphi < 90^\circ,$$
$$90^\circ < \varphi < 180^\circ,$$
$$180^\circ < \varphi < 270^\circ,$$
$$270^\circ < \varphi < 360^\circ$$

ist, so hat $cos\varphi$ mit $b_1 - q$, $sin\varphi$ mit $c_1 - r$ stets einerlei Vorzeichen, und das Vorzeichen von $tang\psi$ ist also mit dem Vorzeichen von $a_1 - p$ einerlei. Nimmt man dann ferner ψ stets positiv und nicht grösser als 180°, so hat $cos\psi$ einerlei Vorzeichen mit $a_1 - p$, und man kann also unter diesen Voraussetzungen immer

$$E_1 = \frac{a_1 - p}{cos\psi}$$

setzen.

Berechnet man ferner den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$sin\omega = \mu\ sin\Theta,$$

und nimmt den absoluten Werth von ω nicht grösser als 90°, so ist

$$cos\omega = \sqrt{1 - \mu^2\ sin\Theta^2},$$

und folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\frac{cos\alpha_1}{(\mu)} = cos\alpha + cos\alpha' \frac{sin(\omega + \Theta)}{sin\omega},$$
$$\frac{cos\beta_1}{(\mu)} = cos\beta + cos\beta' \frac{sin(\omega + \Theta)}{sin\omega},$$
$$\frac{cos\gamma_1}{(\mu)} = cos\gamma + cos\gamma' \frac{sin(\omega + \Theta)}{sin\omega};$$

oder

$$cos\alpha_1 = (\mu)\left\{cos\alpha + cos\alpha' \frac{sin(\omega + \Theta)}{sin\omega}\right\},$$
$$cos\beta_1 = (\mu)\left\{cos\beta + cos\beta' \frac{sin(\omega + \Theta)}{sin\omega}\right\},$$
$$cos\gamma_1 = (\mu)\left\{cos\gamma + cos\gamma' \frac{sin(\omega + \Theta)}{sin\omega}\right\}.$$

Daher sind die bequemsten Formeln zur Bestimmung der Lage des abgelenkten Strahls jetzt die folgenden:

$$tang\,\varphi = \frac{c_1 - r}{b_1 - q},$$

$$tang\,\psi = \frac{b_1 - q}{(a_1 - p)\cos\varphi} = \frac{c_1 - r}{(a_1 - p)\sin\varphi};$$

$$E_1 = \frac{a_1 - p}{\cos\psi},$$

$$K_1 = (a_1 - p)\cos\alpha + (b_1 - q)\cos\beta + (c_1 - r)\cos\gamma;$$

$$\sin\Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}},\quad \sin\omega = \mu\sin\Theta;$$

$$\begin{aligned} p_1 &= p + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha, \\ q_1 &= q + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\beta, \\ r_1 &= r + (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\gamma; \end{aligned}$$

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},$$

$$\cos\beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1},$$

$$\cos\gamma' = \frac{c_1 - r_1}{R_1};$$

$$\cos\alpha_1 = (\mu)\left\{\cos\alpha + \cos\alpha'\,\frac{\sin(\omega + \Theta)}{\sin\omega}\right\},$$

$$\cos\beta_1 = (\mu)\left\{\cos\beta + \cos\beta'\,\frac{\sin(\omega + \Theta)}{\sin\omega}\right\},$$

$$\cos\gamma_1 = (\mu)\left\{\cos\gamma + \cos\gamma'\,\frac{\sin(\omega + \Theta)}{\sin\omega}\right\}.$$

Wie die Winkel φ, ψ, ω genommen werden müssen, ist aus dem Obigen bekannt; der Winkel Θ ist nie grösser als 90° zu nehmen.

Die Gleichungen der durch den abgelenkten Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus dargestellten geraden Linie sind

$$\frac{x - p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y - q_1}{\cos\beta_1} = \frac{z - r_1}{\cos\gamma_1},$$

und können daher mittelst des Vorhergehenden auch immer leicht entwickelt werden.

§. 12.

Die Gleichungen der durch den Punkt $(p\ q\ r)$ und den Mittelpunkt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche gelegten geraden Linie sind

$$100)\quad \frac{x-a_1}{p-a_1}=\frac{y-b_1}{q-b_1}=\frac{z-c_1}{r-c_1}.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der durch den abgelenkten Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus dargestellten geraden Linie, deren Gleichungen nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$101)\quad \frac{x-p_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-q_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-r_1}{\cos\gamma_1}$$

sind, durch x, y, z; so erhalten wir mittelst der beiden vorhergehenden Systeme von Gleichungen leicht:

$$102)\quad \frac{x-a_1}{p-a_1}=\frac{y-b_1}{q-b_1}=\frac{z-c_1}{r-c_1}$$

$$=\frac{(q_1-b_1)\cos\alpha_1-(p_1-a_1)\cos\beta_1}{(q-b_1)\cos\alpha_1-(p-a_1)\cos\beta_1}$$

$$=\frac{(r_1-c_1)\cos\beta_1-(q_1-b_1)\cos\gamma_1}{(r-c_1)\cos\beta_1-(q-b_1)\cos\gamma_1}$$

$$=\frac{(p_1-a_1)\cos\gamma_1-(r_1-c_1)\cos\alpha_1}{(p-a_1)\cos\gamma_1-(r-c_1)\cos\alpha_1}$$

und

$$103)\quad \frac{x-p_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-q_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-r_1}{\cos\gamma_1}$$

$$=\frac{(p-a_1)(q_1-b_1)-(q-b_1)(p_1-a_1)}{(q-b_1)\cos\alpha_1-(p-a_1)\cos\beta_1}$$

$$=\frac{(q-b_1)(r_1-c_1)-(r-c_1)(q_1-b_1)}{(r-c_1)\cos\beta_1-(q-b_1)\cos\gamma_1}$$

$$=\frac{(r-c_1)(p_1-a_1)-(p-a_1)(r_1-c_1)}{(p-a_1)\cos\gamma_1-(r-c_1)\cos\alpha_1},$$

woraus sich auch die Gleichung

$$103^*)\ 0 = \{(q-b_1)\ (r_1-c_1)-(r-c_1)\ (q_1-b_1)\}\ \cos\alpha_1 + \{(r-c_1)\ (p_1-a_1)-(p-a_1)\ (r_1-c_1)\}\ \cos\beta_1 + \{(p-a_1)\ (q_1-b_1)-(q-b_1)\ (p_1-a_1)\}\ \cos\gamma_1$$

ergiebt.

Es ist nun

$$\begin{aligned}
&(q_1-b_1)\ \cos\alpha_1-(p_1-a_1)\ \cos\beta_1\\
=\ &\{(q-b_1)+(q_1-q)\}\ \cos\alpha_1\\
-\ &\{(p-a_1)+(p_1-p)\}\ \cos\beta_1\\
=\ &(q-b_1)\ \cos\alpha_1-(p-a_1)\ \cos\beta_1\\
+\ &(q_1-q)\ \cos\alpha_1-(p_1-p)\ \cos\beta_1\\
=\ &(q-b_1)\ \cos\alpha_1-(p-a_1)\ \cos\beta_1\\
-\ &(\cos\alpha\ \cos\beta_1-\cos\beta\ \cos\alpha_1)\ (K_1+R_1\cos\Theta),
\end{aligned}$$

und, wenn wir der Kürze wegen

$$104)\quad \mathfrak{T} = \cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

setzen:

$$\cos\alpha\ \cos\beta_1-\cos\beta\ \cos\alpha_1 = (\mu)\ (\cos\alpha\ \cos\beta'-\cos\beta\ \cos\alpha')\ \mathfrak{T}$$

$$= (\mu)\ \{(p_1-a_1)\cos\beta-(q_1-b_1)\ \cos\alpha\}\ \frac{\mathfrak{T}}{R_1}$$

$$= (\mu)\ \{(p\ -a_1)\cos\beta-(q\ -b_1)\ \cos\alpha\}\ \frac{\mathfrak{T}}{R_1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
&(q_1-b_1)\ \cos\alpha_1-(p_1-a_1)\ \cos\beta_1\\
=\ &(q-b_1)\ \cos\alpha_1-(p\ -a_1)\ \cos\beta_1\\
+\ &\{(q-b_1)\cos\alpha-(p-a_1)\cos\beta\}\ \frac{(\mu)\,\mathfrak{T}\,(K_1+R_1\cos\Theta)}{R_1}.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
&(q-b_1)\ \cos\alpha_1-(p-a_1)\ \cos\beta_1\\
=\ &(\mu)\ \{(q-b_1)\ \cos\alpha-(p-a_1)\ \cos\beta\}\\
+\ &(\mu)\ \{(q-b_1)\ \cos\alpha'-(p-a_1)\ \cos\beta'\}\ \mathfrak{T}\\
=\ &(\mu)\ \{(q-b_1)\ \cos\alpha-(p-a_1)\ \cos\beta\}\\
-\ &(\mu)\ \{(q-b_1)\ (p_1-a_1)-(p-a_1)\ (q_1-b_1)\}\ \frac{\mathfrak{T}}{R_1}\\
=\ &(\mu)\ \{(q-b_1)\cos\alpha-(p-a_1)\ \cos\beta\}\\
-\ &(\mu)\{(q-b_1)\cos\alpha-(p-a_1)\cos\beta\}\ \frac{\mathfrak{T}\,(K_1+R_1\cos\Theta)}{R_1}\\
=\ &(\mu)\{(q-b_1)\cos\alpha-(p-a_1)\cos\beta\}\ \left\{1-\frac{\mathfrak{T}\,(K_1+R_1\cos\Theta)}{R_1}\right\},
\end{aligned}$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$(q_1 - b_1)\ cos\alpha_1 - (p_1 - a_1)\ cos\beta_1$$
$$= (\mu)\ \{(q - b_1)\ cos\alpha - (p - a_1)\ cos\beta\}.$$

Also ist nach 102)

$$105)\quad \frac{x - a_1}{p - a_1} = \frac{y - b_1}{q - b_1} = \frac{z - c_1}{r - c_1} = \frac{R_1}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)},$$

und folglich, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$106)\quad \frac{x - p}{x - a_1} = \frac{y - q}{y - b_1} = \frac{z - r}{z - c_1} = \frac{\mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}{R_1}.$$

Mittelst der Gleichungen 105) und 106) erhält man sogleich:

$$107)\quad \begin{cases} x - a_1 = \dfrac{R_1}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}(p - a_1), \\ y - b_1 = \dfrac{R_1}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}(q - b_1), \\ z - c_1 = \dfrac{R_1}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}(r - c_1) \end{cases}$$

und

$$108)\quad \begin{cases} x - p = \dfrac{\mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}(p - a_1), \\ y - q = \dfrac{\mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}(q - b_1), \\ z - r = \dfrac{\mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}(r - c_1). \end{cases}$$

Bestimmt man aber aus diesen oder den vorhergehenden Gleichungen die Coordinaten x, y, z selbst, so erhält man:

$$109)\quad \begin{cases} x = \dfrac{pR_1 - a_1\mathfrak{T}(K_1 + R_1 cos\Theta)}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1 cos\Theta)}, \\ y = \dfrac{qR_1 - b_1\mathfrak{T}(K_1 + R_1\ cos\Theta)}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1 cos\Theta)}, \\ z = \dfrac{rR_1 - c_1\mathfrak{T}(K_1 + R_1 cos\Theta)}{R_1 - \mathfrak{T}(K_1 + R_1 cos\Theta)}; \end{cases}$$

oder, wenn man für $\mathfrak{T}$ seinen aus 104) bekannten Werth setzt:

$$110)\quad \begin{cases} x = \dfrac{pR_1 - a_1(K_1 + R_1\cos\Theta)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{R_1 - (K_1 + R_1\cos\Theta)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}, \\ y = \dfrac{qR_1 - b_1(K_1 + R_1\cos\Theta)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{R_1 - (K_1 + R_1\cos\Theta)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}, \\ z = \dfrac{rR_1 - c_1(K_1 + R_1\cos\Theta)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{R_1 - (K_1 + R_1\cos\Theta)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der durch den Punkt $(p\ q\ r)$ und den Mittelpunkt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche gelegten geraden Linie sind auch

$$111)\quad \frac{x-p}{a_1-p} = \frac{y-q}{b_1-q} = \frac{z-r}{c_1-r}$$

oder

$$112)\quad \begin{cases} y - q = \dfrac{b_1-q}{a_1-p}(x-p), \\ z - r = \dfrac{c_1-r}{a_1-p}(x-p). \end{cases}$$

Lassen wir nun die durch den einfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus dargestellte gerade Linie, deren Gleichungen, weil in ihr bekanntlich der Punkt $(p\,q\,r)$ liegt,

$$113)\quad \frac{x-p}{\cos\alpha} = \frac{y-q}{\cos\beta} = \frac{z-r}{\cos\gamma}$$

oder

$$114)\quad \begin{cases} y - q = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-p), \\ z - r = \dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-p) \end{cases}$$

sind, indem dieselbe sich um den Punkt $(p\ q\ r)$ dreht, sich der durch den Punkt $(p\ q\ r)$ und den Mittelpunkt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der ge-

gebenen Kugelfläche gehenden geraden Linie nähern; so werden wegen der Gleichungen 112) und 114) die Grössen

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \text{ und } \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$$

sich respective den Grössen

$$\frac{b_1 - q}{a_1 - p} \text{ und } \frac{c_1 - r}{a_1 - p}$$

nähern. Weil aber bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

also

$$\cos\alpha^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)^2 \right\} = 1$$

ist, so ist offenbar mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \pm \frac{\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)^2}};$$

und wenn also die durch den einfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus dargestellte gerade Linie sich, um den in ihr liegenden Punkt $(p\ q\ r)$ gedreht, der durch den Punkt $(p\ q\ r)$ und den Mittelpunkt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche gehenden geraden Linie nähert, so nähern

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

sich respective den Gränzen

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2}},$$

$$\pm \frac{\frac{b_1 - q}{a_1 - p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2}},$$

$$\pm \frac{\frac{c_1 - r}{a_1 - p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2}};$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Also nähert die Grösse

$$K_1 = (a_1 - p)\ cos\,\alpha + (b_1 - q)\ cos\,\beta + (c_1 - r)\ cos\,\gamma$$

sich der Grösse

$$\pm \frac{a_1 - p + \frac{(b_1 - q)^2}{a_1 - p} + \frac{(c_1 - r)^2}{a_1 - p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2}},$$

d. i. der Grösse

$$\pm (a_1 - p)\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2},$$

und K_1^2 nähert sich folglich offenbar der Grösse

$$E_1^2 = (a_1 - p)^2 + (b_1 - q)^2 + (c_1 - r)^2.$$

Weil nun bekanntlich

$$sin\ \Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)\ (E_1 - K_1)}{R_1^2}} = \sqrt{\frac{E_1^2 - K_1^2}{R_1^2}}$$

und Θ nicht grösser als 90° zu nehmen ist, so nähert sich unter der gemachten Voraussetzung Θ offenbar der Null, und also

$$cos\,\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\, sin\,\Theta^2}$$

der Grösse $1 + \frac{1}{\mu}$. Bezeichnen wir nun die Werthe, denen die vorher durch x, y, z bezeichneten Coordinaten sich nähern, wenn

sich die durch den einfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus dargestellte gerade Linie, um den in ihr liegenden Punkt $(p\ q\ r)$ gedreht, der durch den Punkt $(p\ q\ r)$ und den Mittelpunkt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche gehenden geraden Linie nähert, respective durch $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $r^{(1)}$; so ist nach dem Vorhergehenden und den Gleichungen 107), 108) und 109) oder 110) offenbar:

$$115)\quad \begin{cases} p^{(1)}-a_1 = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}(p-a_1), \\ q^{(1)}-b_1 = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}(q-b_1) \\ r^{(1)}-c_1 = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}(r-c_1); \end{cases}$$

oder

$$116)\quad \begin{cases} p^{(1)}-p = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}(p-a_1), \\ q^{(1)}-q = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}(q-b_1), \\ r^{(1)}-r = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}(r-c_1); \end{cases}$$

oder

$$117)\quad \begin{cases} p^{(1)} = \dfrac{pR_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)a_1\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}, \\ q^{(1)} = \dfrac{qR_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)b_1\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}, \\ r^{(1)} = \dfrac{rR_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)c_1\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm (a_1-p)\sqrt{1+\left(\frac{b_1-q}{a_1-p}\right)^2+\left(\frac{c_1-r}{a_1-p}\right)^2}\right\}}. \end{cases}$$

Dass der durch die Coordinaten $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $r^{(1)}$ bestimmte Punkt in der durch den Punkt $(p\ q\ r)$ und den Mittelpunkt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche gehenden geraden Linie liegt, erhellet aus den Gleichungen 111) und 116) auf der Stelle.

Vorzüglich ist nun noch eine Bestimmung nöthig, wie in den vorhergehenden Formeln die Vorzeichen zu nehmen sind, welche auf folgende Art gegeben werden kann.

Durch den Punkt $(p\ q\ r)$ wollen wir uns drei den primitiven Axen parallele Axen gelegt denken, und die mit den positiven Theilen dieser Axen von der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\varkappa$, λ, ν bezeichnen; so ist, weil

$$E_1 = \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}$$

die Entfernung der beiden Punkte $(p\ q\ r)$ und $(a_1\ b_1\ c_1)$ von einander ist, offenbar in völliger Allgemeinheit

$$a_1 - p = E_1 \cos\varkappa,\quad b_1 - q = E_1\cos\lambda,\quad c_1 - r = E_1\cos\nu;$$

und folglich

$$\cos\varkappa = \frac{a_1-p}{E_1} = \frac{a_1-p}{\sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}},$$

$$\cos\lambda = \frac{b_1-q}{E_1} = \frac{b_1-q}{\sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{c_1-r}{E_1} = \frac{c_1-r}{\sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}};$$

also

$$\cos\varkappa = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2}},$$

$$\cos\lambda = \pm \frac{\frac{b_1 - q}{a_1 - p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = \pm \frac{\frac{c_1 - r}{a_1 - p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - q}{a_1 - p}\right)^2 + \left(\frac{c_1 - r}{a_1 - p}\right)^2}};$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem $a_1 - p$ eine positive oder eine negative Grösse ist. Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich unmittelbar Folgendes.

Wenn $a_1 - p$ eine positive Grösse ist, so sind in den Gleichungen 115), 116) und 117) die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie, oder deren Verlängerung über den Punkt $(p\ q\ r)$ hinaus nähert.

Wenn $a_1 - p$ eine negative Grösse ist, so sind in den Gleichungen 115), 116) und 117) die untern oder obern Zeichen zu nehmen, jenachdem sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie, oder deren Verlängerung über den Punkt $(p\ q\ r)$ hinaus nähert.

Nach 115), 116) und 117) ist aber, wenn $a_1 - p$ eine positive Grösse ist, offenbar:

$$p^{(1)}-a_1 = \frac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(p-a_1),$$

$$q^{(1)}-b_1 = \frac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(q-b_1),$$

$$r^{(1)}-c_1 = \frac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(r-c_1);$$

ferner

$$p^{(1)}-p = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(p-a_1),$$

$$q^{(1)}-q = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(q-b_1),$$

$$r^{(1)}-r = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(r-c_1);$$

und

$$p^{(1)} = \frac{pR_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)a_1\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}},$$

$$q^{(1)} = \frac{qR_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)b_1\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}},$$

$$r^{(1)} = \frac{rR_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)c_1\left\{c_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}.$$

Wenn dagegen $a_1 - p$ eine negative Grösse ist, so ist nach den Gleichungen 115), 116) und 117) offenbar:

$$p^{(1)}-a_1 = \frac{R_1}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(p-a_1),$$

$$q^{(1)}-b_1 = \frac{R_1}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(q-b_1),$$

$$r^{(1)}-c_1 = \frac{R_1}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(r-c_1);$$

ferner

$$p^{(1)}-p = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(p-a_1),$$

$$q^{(1)}-q = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(q-b_1),$$

$$r^{(1)}-r = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(r-c_1);$$

und

$$p^{(1)} = \frac{pR_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)a_1\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}},$$

$$q^{(1)} = \frac{qR_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)b_1\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}},$$

$$r^{(1)} = \frac{rR_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)c_1\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \mp \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden offenbar immer:

$$118)\quad \begin{cases} p^{(1)}-a_1 = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(p-a_1), \\ q^{(1)}-b_1 = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(q-b_1), \\ r^{(1)}-c_1 = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(r-c_1); \end{cases}$$

ferner

$$119)\quad \begin{cases} p^{(1)}-p = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(p-a_1), \\ q^{(1)}-q = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(q-b_1), \\ r^{(1)}-r = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}(r-c_1); \end{cases}$$

und

$$120)\quad \begin{cases} p^{(1)} = \dfrac{pR_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)a_1\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}, \\ q^{(1)} = \dfrac{qR_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)b_1\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}, \\ r^{(1)} = \dfrac{rR_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)c_1\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2+(c_1-r)^2}\right\}}; \end{cases}$$

mit der Bestimmung, dass man in diesen sämmtlichen Formeln jederzeit die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, jenachdem sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie oder deren Verlängerung über den Punkt $(p\ q\ r)$ hinaus nähert.

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ von dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche durch $E_1^{(1)}$, so ist nach den Gleichungen 118) offenbar

$$121)\quad (E_1^{(1)})^2 = \left\{\frac{R_1 E_1}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)(R_1 \pm E_1)}\right\}^2,$$

und folglich, ohne alle Beziehung der obern und untern Zeichen im Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf einander:

$$122)\quad E_1^{(1)} = \frac{(\pm) R_1 E_1}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)(R_1 \pm E_1)}.$$

Im Nenner ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie oder deren Verlängerung über den Punkt $(p\ q\ r)$ hinaus nähert. Im Zähler ist, wenn auf diese Weise das im Nenner zu nehmende Zeichen richtig bestimmt worden ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{R_1}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)(R_1 \pm E_1)}$$

positiv oder negativ ist. Nun ist aber nach 118)

$$\frac{R_1}{R_1 - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)(R_1 \pm E_1)} = \frac{p^{(1)}-a_1}{p-a_1} = \frac{q^{(1)}-b_1}{q-b_1} = \frac{r^{(1)}-c_1}{r-c_1},$$

und die vorstehende Grösse ist daher positiv oder negativ, jenachdem die Grössen

$$p - a_1 \text{ und } p^{(1)} - a_1,$$
$$q - b_1 \text{ und } q^{(1)} - b_1,$$
$$r - c_1 \text{ und } r^{(1)} - c_1$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Ueberlegt man nun aber, dass nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$p - a_1,\ q - b_1,\ r - c_1$$

und

$$p^{(1)} - a_1,\ q^{(1)} - b_1,\ r^{(1)} - c_1$$

die Coordinaten der Punkte $(p\ q\ r)$ und $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche gelegtes, dem primitiven Systeme paralles System sind; so wird aus dem Vorhergehenden auf der Stelle erhellen, dass die Grösse

$$\frac{R_1}{R_1 - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)(R_1 \pm E_1)}$$

jederzeit positiv oder negativ ist, jenachdem die Punkte $(p\ q\ r)$ und $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ auf einer und derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten des mit ihnen in gerader Linie liegenden Mittelpunkts $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche liegen.

Hiernach hat man also in der Gleichung 122) im Nenner das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie oder deren Verlängerung über den Punkt $(p\ q\ r)$ hinaus nähert; im Zähler hat man dagegen, nachdem auf die vorhergehende Weise das Zeichen im Nenner richtig bestimmt worden ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die Punkte $(p\ q\ r)$ und $(p^{(1)}\ q^{(1)}\ r^{(1)})$ auf einer und derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten des mit ihnen in gerader Linie liegenden Mittelpunkts $(a_1\ b_1\ c_1)$ der gegebenen Kugelfläche liegen.

Ganz mit derselben Bestimmung wegen der nicht eingeklammerten und eingeklammerten Vorzeichen wie vorher kann man, wie durch leichte Rechnung gefunden wird, die Gleichung 122) auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$123)\quad \frac{1}{E_1}(\pm)\frac{\mu}{E_1^{(1)}} = \mp\frac{1+\mu}{R_1},$$

woraus für $\mu = 1$ sich die Gleichung

$$124)\quad \frac{1}{E_1}(\pm)\frac{1}{E_1^{(1)}} = \mp\frac{2}{R_1}$$

ergiebt.

Wenn wir die Axe der x durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugelfläche legen, so ist $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, und folglich nach 119);

$$125)\quad \left\{\begin{aligned} p^{(1)}-p &= \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+q^2+r^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+q^2+r^2}\right\}}(p-a_1),\\ q^{(1)}-q &= \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+q^2+r^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+q^2+r^2}\right\}}q,\\ r^{(1)}-r &= \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+q^2+r^2}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 \pm \sqrt{(a_1-p)^2+q^2+r^2}\right\}}r; \end{aligned}\right.$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem sich der von dem Punkte $(p\,q\,r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\,q\,r)$ aus nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie oder deren Verlängerung über den Punkt $(p\,q\,r)$ hinaus nähert.

Nehmen wir nun ferner einen der beiden Durchschnittspunkte der gegebenen Kugelfläche mit der Axe der x als Anfang der $x\,y\,z$ an, betrachten bloss solche Theile der gegebenen Kugelfläche, welche nicht grösser als die halbe Kugelfläche, deren höchster Punkt der Anfang der $x\,y\,z$ ist, sind, und nehmen, dies vorausgesetzt, die positiven x immer auf der convexen Seite der gege-

benen Kugelfläche, so haben wir die beiden folgenden Fälle von einander zu unterscheiden.

Wenn R_1 positiv ist, so ist $a_1 = -R_1$. Nähert sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie, so ist p negativ und $-p > R_1$, d. i. nach dem Vorhergehenden $-p > -a_1$, also $p < a_1$, und folglich $a_1 - p = -(R_1 + p)$ eine positive Grösse. Daher ist in diesem Falle nach 125):

$$p^{(1)} - p = \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 - (R_1 + p)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(R_1 + p)^2}}\right\}}{R_1 - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 - (R_1 + p)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(R_1 + p)^2}}\right\}}(R_1 + p),$$

$$q^{(1)} - q = \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 - (R_1 + p)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(R_1 + p)^2}}\right\}}{R_1 - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 - (R_1 + p)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(R_1 + p)^2}}\right\}}\ q,$$

$$r^{(1)} - r = \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 - (R_1 + p)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(R_1 + p)^2}}\right\}}{R_1 - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1 - (R_1 + p)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(R_1 + p)^2}}\right\}}\ r.$$

Nähert sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der Verlängerung der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie über den Punkt $(p\ q\ r)$ hinaus, so ist entweder p negativ und $-p < R_1$, d. i. nach dem Vorhergehenden $-p < -a_1$, also $p > a_1$, und folglich $a_1 - p = -(R_1 + p)$ eine negative Grösse; oder es ist p positiv, und folglich $a_1 - p = -(R_1 + p)$ offenbar wieder eine negative Grösse. Daher ist in diesem Falle nach 125) wieder:

$$p^{(1)}-p=\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}(R_1+p),$$

$$q^{(1)}-q=\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}q,$$

$$r^{(1)}-r=\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}r.$$

Wenn R_1 negativ ist, so ist $a_1=R_1$. Nähert sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie, so ist entweder p positiv, also $p>R_1$, folglich $a_1-p=R_1-p$ eine negative Grösse; oder es ist p negativ und $-p<-R_1$, d. i. nach dem Vorhergehenden $-p<-a_1$, also $p>a_1$, und folglich $a_1-p=R_1-p$ wieder eine negative Grösse. Daher ist nach 125):

$$p^{(1)}-p=-\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{(R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}(R_1-p),$$

$$q^{(1)}-q=\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}q,$$

$$r^{(1)}-r=\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}r.$$

Nähert sich der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ nach der Richtung der Bewegung des Strahls hin ausgehende Theil desselben der Verlängerung der von dem Punkte $(p\ q\ r)$ aus nach dem Mittelpunkte der gegebenen Kugelfläche hin gezogenen geraden Linie über den Punkt $(p\ q\ r)$ hinaus, so ist p negativ und $-p > -R_1$, d. i. nach dem Vorhergehenden $-p > -a_1$, also $p < a_1$, und folglich $a_1 - p = R_1 - p$ eine positive Grösse. Daher ist in diesem Falle nach 125) wieder:

$$p^1 - p = -\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}(R_1-p),$$

$$q^{(1)} - q = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}q,$$

$$r^{(1)} - r = \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1-p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1-p)^2}}\right\}}r.$$

Hieraus, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, erhellet nun ganz leicht, dass unter den gemachten Voraussetzungen, wenn der Halbmesser R_1 der gegebenen Kugelfläche immer als positiv betrachtet wird, in völliger Allgemeinheit:

126)
$$\begin{cases} p^{(1)} - p = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}(R_1+p), \\ q^{(1)} - q = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}q \\ r^{(1)} - r = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}r \end{cases}$$

ist. Auch ist, wie man hieraus durch leichte Rechnung findet, unter den gemachten Voraussetzungen in völliger Allgemeinheit:

$$127)\quad \begin{cases} p^{(1)}+R_1 = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}(R_1+p), \\ q^{(1)} = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}q, \\ r^{(1)} = \dfrac{R_1}{R_1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left\{R_1-(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\right\}}r; \end{cases}$$

oder

$$128)\quad \begin{cases} p^{(1)}+R_1 = -\dfrac{\mu R_1}{R_1-(1+\mu)(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\}}(R_1+p), \\ q^{(1)} = -\dfrac{\mu R_1}{R_1-(1+\mu)(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\}}q, \\ r^{(1)} = -\dfrac{\mu R_1}{R_1-(1+\mu)(R_1+p)\sqrt{1+\frac{q^2+r^2}{(R_1+p)^2}}\}}r. \end{cases}$$

Man erhält hieraus auch:

$$129)\quad \frac{p+R_1}{p^{(1)}+R_1} = \frac{q}{q^{(1)}} = \frac{r}{r^{(1)}}.$$

Wenn wir die positiven x von demselben Anfangspunkte an wie vorher immer nach einer und derselben Seite hin nehmen und den Halbmesser R_1 der gegebenen Kugelfläche als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem derselbe von dem Anfange der $x\,y\,z$ an nach der Seite der positiven oder nach der Seite der negativen x hin liegt, so müssen wir in den vorhergehenden Formeln offenbar in dem Falle, wenn der positive Theil der Axe der x auf der convexen Seite der gegebenen Kugelfläche liegt, für p, $p^{(1)}$, R_1 respective p, $p^{(1)}$, $-R_1$, in dem Falle dagegen, wenn der positive Theil der Axe der x auf der concaven Seite der

gegebenen Kugelfläche liegt, für $p, p^{(1)}, R_1$ respective $-p, -p^{(1)}, R_1$ setzen. Im ersten Falle erhält man aus den Gleichungen 128):

$$p^{(1)} - R_1 = \frac{\mu R_1}{-R_1 - (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} (p - R_1),$$

$$q^{(1)} = \frac{\mu R_1}{-R_1 - (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} q,$$

$$r^{(1)} = \frac{\mu R_1}{-R_1 - (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} r;$$

d. i.

$$p^{(1)} - R_1 = -\frac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} (p - R_1),$$

$$q^{(1)} = -\frac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} q,$$

$$r^{(1)} = -\frac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} r.$$

Im zweiten Falle geben die Gleichungen 128):

$$p^{(1)} - R_1 = -\frac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} (p - R_1)$$

$$q^{(1)} = -\frac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} q,$$

$$r^{(1)} = -\frac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}} r;$$

d. i. ganz dieselben Formeln wie vorher.

Also ist unter den gemachten Voraussetzungen in völliger Allgemeinheit:

$$130)\quad \begin{cases} p^{(1)} - R_1 = -\dfrac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1+\dfrac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}}(p-R_1), \\ q^{(1)} = -\dfrac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1+\dfrac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}}\, q, \\ r^{(1)} = -\dfrac{\mu R_1}{R_1 + (1+\mu)(p-R_1)\sqrt{1+\dfrac{q^2+r^2}{(p-R_1)^2}}}\, r; \end{cases}$$

und folglich

$$131)\quad \frac{p-R_1}{p^{(1)}-R_1} = \frac{q}{q^{(1)}} = \frac{r}{r^{(1)}}.$$

§. 13.

Unter der Voraussetzung, dass die Axe der x wieder durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugelfläche gelegt ist, wollen wir jetzt annehmen, dass der im Vorhergehenden betrachtete, durch den Punkt $(p\ q\ r)$ gehende Strahl der Axe der x parallel sei. In diesem Falle ist, wenn wir im Folgenden immer die obern oder untern Zeichen nehmen, jenachdem sich der Strahl nach der Richtung des positiven Theils der Axe der x, oder nach der Richtung des negativen Theils der Axe der x hin bewegt,

$$\cos\alpha = \pm 1,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 0.$$

Also ist nach §. 11.

$$132)\quad E_1 = \sqrt{(a_1-p)^2+q^2+r^2},\quad K_1 = \pm(a_1-p);$$

ferner

$$133)\quad \cos\Theta = \sqrt{1-\frac{q^2+r^2}{R_1^2}},\quad \sin\Theta = \sqrt{\frac{q^2+r^2}{R_1^2}};$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$134)\quad \begin{cases} p_1 = a_1 \pm R_1\sqrt{1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}, \\ q_1 = q, \\ r_1 = r. \end{cases}$$

Also

$$135)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \mp\sqrt{1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}, \\ \cos\beta' = -\dfrac{q}{R_1}, \\ \cos\gamma' = -\dfrac{r}{R_1}; \end{cases}$$

und

$$136)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = \pm\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2} \mp \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\left(1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}\right)\left(1-\mu^2\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}\right)}, \\ \dfrac{\cos\beta_1}{(\mu)} = -\dfrac{q}{R_1}\left(\sqrt{1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}+\dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}\right), \\ \dfrac{\cos\gamma_1}{(\mu)} = -\dfrac{r}{R_1}\left(\sqrt{1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}+\dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}\right). \end{cases}$$

Daher sind

$$137)\quad \pm\frac{x-a_1\mp R_1\sqrt{1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}}{\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}-\dfrac{1}{\mu}\sqrt{\left(1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}\right)\left(1-\mu^2\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}\right)}} = -\frac{y-q}{\dfrac{q}{R_1}\left(\sqrt{1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}+\dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}\right)} = -\frac{z-r}{\dfrac{r}{R_1}\left(\sqrt{1-\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\dfrac{q^2+r^2}{R_1^2}}\right)}$$

die Gleichungen der durch den abgelenkten Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1\ q_1\ r_1)$ hinaus dargestellten geraden Linie.

Bezeichnet man die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der ersten Coordinatenaxe durch x, so erhält man aus den vorhergehenden Gleichungen, wenn man in denselben $y = 0$, $z = 0$ setzt, zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$\pm \frac{x - a_1 \mp R_1 \sqrt{1 - \frac{q^2 + r^2}{R_1^2}}}{\frac{q^2 + r^2}{R_1^2} - \frac{1}{\mu}\sqrt{\left(1 - \frac{q^2 + r^2}{R_1^2}\right)\left(1 - \mu^2 \frac{q^2 + r^2}{R_1^2}\right)}} = \frac{R_1}{\sqrt{1 - \frac{q^2 + r^2}{R_1^2}} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \frac{q^2 + r^2}{R_1^2}}},$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$138) \quad x = a_1 \pm \frac{R_1}{\sqrt{1 - \frac{q^2 + r^2}{R_1^2}} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \frac{q^2 + r^2}{R_1^2}}}$$

ergiebt.

Lässt man den der Axe der x parallelen Strahl sich der Axe der x nähern, so nähern q und r sich beide der Null; und bezeichnen wir nun die Grösse, welcher sich unter dieser Voraussetzung die vorher durch x bezeichnete Coordinate nähert, durch $p^{(1)}$, so ist

$$139) \quad p^{(1)} = a_1 \pm \frac{\mu}{1 + \mu} R_1,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem der Strahl sich nach der Richtung des positiven oder nach der Richtung des negativen Theils der Axe der x hin bewegt.

Drittes Kapitel.

Von den Kugelflächensystemen.

§. 14.

Unter einem Kugelflächensysteme verstehen wir hier jede beliebige Anzahl von Kugelflächen, deren Mittelpunkte sämmtlich in einer und derselben geraden Linie, welche die Axe des Systems genannt wird, liegen. Um aber die Betrachtung für unsern gegenwärtigen Zweck nicht unnöthigerweise zu verwickeln, werden wir bloss solche Segmente von Kugelflächen betrachten, welche die Axe des Systems in einem Punkte schneiden, und nicht grösser als die um diese Durchschnittspunkte als ihre höchsten Punkte liegenden halben Kugelflächen sind. Der Durschnittspunkt einer jeden Kugelfläche mit der Axe des Systems soll der Scheitel dieser Kugelfläche genannt werden, und die einzelnen Kugelflächen wollen wir nach der Reihe die

1ste, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te, ...

Kugelfläche, die entsprechenden Scheitel aber den

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ...

Scheitel nennen.

Durch alle Scheitel als Anfangspunkte denken wir uns sämmtlich unter einander parallele rechtwinklige Coordinatensysteme gelegt, in denen also auch die positiven Theile der sämmtlichen einander parallelen Coordinatenaxen von den entsprechenden Anfangspunkten an nach denselben Seiten hin liegen, und lassen die sämmtlichen ersten Coordinatenaxen in die Axe des Systems hinein fallen. Diese durch den

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ...

Scheitel als Anfangspunkte gelegten Coordinatensysteme sollen respective das

1ste, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te, ...

Coordinatensystem genannt werden.

Die Halbmesser der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ...

Kugelfläche bezeichnen wir respective durch

$$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, \ldots\ldots$$

und betrachten dieselben als positiv oder als negativ, jenachdem sie von dem

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ...

Scheitel an in den positiven oder negativen Theilen der entsprechenden ersten Coordinatenaxen liegen. Die Entfernungen des

2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten, ...

Scheitels von dem

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ...

Scheitel sollen respective durch

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, \ldots\ldots$$

bezeichnet, und als positiv oder als negativ betrachtet werden, jenachdem sie von dem

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ...

Scheitel an in den positiven oder negativen Theilen der entsprechenden ersten Coordinatenaxen liegen. Die reciproken Ablenkungsverhältnisse für die

1ste, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te, ...

Kugelfläche, welche im Falle der Reflexion immer als positiv, im Falle der Refraction immer als negativ betrachtet werden, bezeichnen wir mit Rücksicht hierauf respective durch

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \ldots.$$

Wenn nun Strahlen, welche, nöthigenfalls gehörig verlängert, durch ein und denselben in Bezug auf das 1ste Coordinatensystem durch die Coordinaten p, q, r bestimmten Punkt $(p\ q\ r)$ gehen, auf die 1ste Kugelfläche fallen, und an derselben eine Ablenkung erleiden, so giebt es, wie im vorhergehenden Kapitel in aller Strenge gezeigt worden ist, immer einen völlig bestimmten Punkt, welcher als die Gränze der Durchschnittspunkte aller an der 1sten Kugelfläche abgelenkten Strahlen mit der durch den Punkt $(p\ q\ r)$ und den Mittelpunkt der 1sten Kugelfläche gezogenen geraden Linie betrachtet werden kann, und im Folgenden das der 1sten Kugelfläche entsprechende Bild des Punktes $(p\ q\ r)$ genannt werden soll. Leicht wird aber in die Augen fallen, dass

es nun, wenn nur die 2te Kugelfläche von den abgelenkten Strahlen getroffen wird, im Allgemeinen immer wieder ein der 2ten Kugelfläche entsprechendes Bild des der 1sten Kugelfläche entsprechenden Bildes des Punktes $(p\ q\ r)$ geben wird, welches wir das der 2ten Kugelfläche entsprechende Bild des Punktes $(p\ q\ r)$ nennen wollen. Auf ähnliche Art giebt es wieder im Allgemeinen ein der 3ten Kugelfläche entsprechendes Bild des der 2ten Kugelfläche entsprechenden Bildes des Punktes $(p\ q\ r)$, welches das der 3ten Kugelfläche entsprechende Bild des Punktes $(p\ q\ r)$ genannt werden soll, u. s. w. Die Coordinaten der der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten 6ten, ...

Kugelfläche entsprechenden Bilder des Punktes $(p\ q\ r)$ in dem

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ...

Coordinatensysteme wollen wir respective durch

$$p_1,\ q_1,\ r_1;\ p_2,\ q_2,\ r_2;\ p_3,\ q_3,\ r_3;\ p_4,\ q_4,\ r_4;\ .....$$

diese Bilder selbst also durch

$$(p_1\ q_1\ r_1),\ (p_2\ q_2\ r_2),\ (p_3\ q_3\ r_3),\ (p_4\ q_4\ r_4),\ .....$$

bezeichnen.

Wenn wir nun die Coordinaten derselben Bilder nach der Reihe in dem

2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten, ...

Coordinatensysteme durch

$$p'_1,\ q'_1,\ r'_1;\ p'_2,\ q'_2,\ r'_2;\ p'_3,\ q'_3,\ r'_3;\ p'_4,\ q'_4,\ r'_4;\ .....$$

bezeichnen, so haben wir unter den gemachten Voraussetzungen nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} p'_1 = p_1 - E_1, & q'_1 = q_1, & r'_1 = r_1; \\ p'_2 = p_2 - E_2, & q'_2 = q_2, & r'_2 = r_2; \\ p'_3 = p_3 - E_3, & q'_3 = q_3, & r'_3 = r_3; \\ p'_4 = p_4 - E_4, & q'_4 = q_4, & r'_4 = r_4; \end{cases}$$

u. s. w.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$I_1 = - \frac{\mu_1 R_1}{R_1 + (1+\mu_1)\ (p - R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(p - R_1)^2}}},$$

$$I_2 = - \frac{\mu_2 R_2}{R_2 + (1+\mu_2)(p'_1 - R_2)\sqrt{1 + \frac{q'^2_1 + r'^2_1}{(p'_1 - R_2)^2}}},$$

$$I_3 = - \frac{\mu_3 R_3}{R_3 + (1+\mu_3)(p'_2 - R_3)\sqrt{1 + \frac{q'^2_2 + r'^2_2}{(p'_2 - R_3)^2}}},$$

$$I_4 = - \frac{\mu_4 R_4}{R_4 + (1+\mu_4)\ (p'_3 - R_4)\sqrt{1 + \frac{q'^2_3 + r'^2_3}{(p'_3 - R_4)^2}}},$$

u. s. w.

so ist nach II. 130):

$$p_1 - R_1 = I_1\ (p - R_1),\ q_1 = I_1\ q,\ r_1 = I_1\ r;$$
$$p_2 - R_2 = I_2\ (p'_1 - R_2),\ q_2 = I_2\ q'_1,\ r_2 = I_2\ r_1;$$
$$p_3 - R_3 = I_3\ (p'_2 - R_3),\ q_3 = I_3\ q'_2,\ r_3 = I_3\ r'_2;$$
$$p_4 - R_4 = I_4\ (p'_3 - R_4),\ q_4 = I_4\ q'_3,\ r_4 = I_4\ r'_3;$$

u. s. w.

Führt man nun aber für

$$p'_1,\ q'_1,\ r'_1;\ p'_2,\ q'_2,\ r'_2;\ p'_3,\ q'_3,\ r'_3;\ p'_4,\ q'_4,\ r'_4;\ \ldots.$$

ihre Werthe aus 1) ein, so erhält man zur successiven Berechnung der Coordinaten

$$p_1,\ q_1,\ r_1;\ p_2,\ q_2,\ r_2;\ p_3,\ q_3,\ r_3;\ p_4,\ q_4,\ r_4;\ \ldots..$$

der Bilder des Punktes $(p\ q\ r)$ aus dessen Coordinaten die folgenden Formeln:

2) $$I_1 = - \frac{\mu_1 R_1}{R_1 + (1+\mu_1)\ (p - R_1)\sqrt{1 + \frac{q^2 + r^2}{(p - R_1)^2}}},$$

$$p_1 - R_1 = I_1 (p - R_1),\quad q_1 = I_1 q,\quad r_1 = I_1 r;$$

$$I_2 = -\frac{\mu_2 R_2}{R_2 + (1+\mu_2)(p_1 - E_1 - R_2)\sqrt{1 + \frac{q_1{}^2 + r_1{}^2}{(p_1 - E_1 - R_2)^2}}},$$

$$p_2 - R_2 = I_2 (p_1 - E_1 - R_2),\ q_2 = I_2 q_1,\ r_2 = I_2 r_1;$$

$$I_3 = -\frac{\mu_3 R_3}{R_3 + (1+\mu_3)(p_2 - E_2 - R_3)\sqrt{1 + \frac{q_2{}^2 + r_2{}^2}{(p_2 - E_2 - R_3)^2}}},$$

$$p_3 - R_3 = I_3 (p_2 - E_2 - R_3),\ q_3 = I_3 q_2,\ r_3 = I_3 r_2;$$

$$I_4 = -\frac{\mu_4 R_4}{R_4 + (1+\mu_4)(p_3 - E_3 - R_4)\sqrt{1 + \frac{q_3{}^2 + r_3{}^2}{(p_3 - E_3 - R_4)^2}}}$$

$$p_4 - R_4 = I_4 (p_3 - E_3 - R_4),\ q_4 = I_4 q_3,\ r_4 = I_4 r_3;$$

u. s. w.

Durch Einführung einiger Hülfswinkel

$$U,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ \ldots,$$

deren absolute Werthe im Folgenden nie grösser als 90° genommen werden sollen, kann man sich die Rechnung nach diesen Formeln erleichtern, wie folgende hier keiner weitern Erläuterung bedürfende Darstellung zeigt:

3) $tang\, U = \frac{r}{q},\ tang\, U_1 = \frac{q}{p - R_1}\ sec\, U;$

$$p_1 - R_1 = -\frac{\mu_1 R_1 (p - R_1)}{R_1 + (1+\mu_1)\, sec\, U_1\, (p - R_1)},$$

$$q_1 = \frac{p_1 - R_1}{p - R_1}\, q,\quad r_1 = \frac{p_1 - R_1}{p - R_1}\, r;$$

$$tang\, U_2 = \frac{p_1 - R_1}{p_1 - E_1 - R_2}\ tang\, U_1,$$

$$p_2 - R_2 = -\frac{\mu_2 R_2\ \frac{tang\, U_1}{tang\, U_2}\ (p_1 - R_1)}{R_2 + (1+\mu_2)\ \frac{tang\, U_1}{sin\, U_2}\ (p_1 - R_1)},$$

$$q_2 = \frac{p_2 - R_2}{p_1 - E_1 - R_2}\, q,\quad r_2 = \frac{p_2 - R_2}{p_1 - E_1 - R_2}\, r;$$

$$tang\, U_3 = \frac{p_2 - R_2}{p_2 - E_2 - R_3}\ tang\, U_2,$$

$$p_3 - R_3 = - \frac{\mu_3 R_3 \frac{tang\, U_2}{tang\, U_3} (p_2 - R_2)}{R_3 + (1+\mu_3) \frac{tang\, U_2}{sin\, U_3} (p_2 - R_2)},$$

$$q_3 = \frac{p_3 - R_3}{p_2 - E_2 - R_3} q_2, \quad r_3 = \frac{p_3 - R_3}{p_2 - E_2 - R_3} r_2;$$

$$tang\, U_4 = \frac{p_3 - R_3}{p_3 - E_3 - R_4} tang\, U_3,$$

$$p_4 - R_4 = - \frac{\mu_4 R_4 \frac{tang\, U_3}{tang\, U_4} (p_3 - R_3)}{R_4 + (1+\mu_4) \frac{tang\, U_3}{sin\, U_4} (p_3 - R_3)},$$

$$q_4 = \frac{p_4 - R_4}{p_3 - E_3 - R_4} q_3, \quad r_4 = \frac{p_4 - R_4}{p_3 - E_3 - R_4} r_3;$$

u. s. w.

oder

$$4) \quad tang\, U = \frac{r}{q}, \quad tang\, U_1 = \frac{q}{p - R_1} sec\, U;$$

$$p_1 - R_1 = - \frac{R_1 \cos U_1}{1 + \frac{1}{\mu_1}\left(1 + \frac{R_1}{p - R_1} \cos U_1\right)},$$

$$q_1 = \frac{p_1 - R_1}{p - R_1} q, \quad r_1 = \frac{p_1 - R_1}{p - R_1} r;$$

$$tang\, U_2 = \frac{p_1 - R_1}{p_1 - E_1 - R_2} tang\, U_1,$$

$$p_2 - R_2 = - \frac{R_2 \cos U_2}{1 + \frac{1}{\mu_2}\left(1 + \frac{R_2}{p_1 - R_1} cot\, U_1 \sin U_2\right)}$$

$$q_2 = \frac{p_2 - R_2}{p_1 - E_1 - R_2} q_1, \quad r_2 = \frac{p_2 - R_2}{p_1 - E_1 - R_2} r_1;$$

$$tang\, U_3 = \frac{p_2 - R_2}{p_2 - E_2 - R_3} tang\, U_2,$$

$$p_3 - R_3 = - \frac{R_3 \cos U_3}{1 + \frac{1}{\mu_3}\left(1 + \frac{R_3}{p_2 - R_2} cot\, U_2 \sin U_3\right)},$$

$$q_3 = \frac{p_3 - R_3}{p_2 - E_2 - R_3} q_2, \quad r_3 = \frac{p_3 - R_3}{p_2 - E_2 - R_3} r_2;$$

$$tang\, U_4 = \frac{p_3 - R_3}{p_3 - E_3 - R_4}\, tang\, U_3,$$

$$p_4 - R_4 = -\frac{R_4 \cos U_4}{1 + \frac{1}{\mu_4}\left(1 + \frac{R_4}{p_3 - R_3}\, cot\, U_3\, \sin U_4\right)},$$

$$q_4 = \frac{p_4 - R_4}{p_3 - E_3 - R_4}\, q_3,\quad r_4 = \frac{p_4 - R_4}{p_3 - E_3 - R_4}\, r_3;$$

u. s. w.

Mittelst dieser Formeln kann man die Lage des einer jeden Kugelfläche in dem gegebenen Systeme entsprechenden Bildes des Punktes $(p\ q\ r)$ mit völliger Genauigkeit und Schärfe bestimmen.

§. 15.

Wenn wir die Entfernungen der Punkte

$$(p\ q\ r),\ (p_1\ q_1\ r_1),\ (p_2\ q_2\ r_2),\ (p_3\ q_3\ r_3),\ \ldots\ldots$$

von der Axe des Systems durch

$$\varrho,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ldots$$

bezeichnen, so ist

$$\varrho = \sqrt{q^2 + r^2},$$
$$\varrho_1 = \sqrt{q_1^2 + r_1^2},$$
$$\varrho_2 = \sqrt{q_2^2 + r_2^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{q_3^2 + r_3^2},$$

u. s. w.

und die Grössen

$$p_1 - R_1,\ q_1,\ r_1;$$
$$p_2 - R_2,\ q_2,\ r_2;$$
$$p_3 - R_3,\ q_3,\ r_3;$$
$$p_4 - R_4,\ q_4,\ r_4;$$

u. s. w.

können nun, wie man mittelst der Gleichungen 2) durch leichte Rechnung findet, auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$p_1 - R_1 = - \frac{\mu_1 R_1 (p - R_1)}{R_1 + (1+\mu_1)(p - R_1)}$$

$$- \frac{\mu_1 (1+\mu_1) R_1 \left\{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\varrho}{p - R_1}\right)^2}\right\}}{\left(1 + \mu_1 + \frac{R_1}{p - R_1}\right)\left\{(1+\mu_1)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho}{p - R_1}\right)^2} + \frac{R_1}{p - R_1}\right\}},$$

$$q_1 = - \frac{\mu_1 \frac{R_1}{p - R_1}}{(1+\mu_1)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho}{p - R_1}\right)^2} + \frac{R_1}{p - R_1}} q,$$

$$r_1 = - \frac{\mu_1 \frac{R_1}{p - R_1}}{(1+\mu_1)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho}{p - R_1}\right)^2} + \frac{R_1}{p - R_1}} r;$$

$$p_2 - R_2 = - \frac{\mu_2 R_2 (p_1 - E_1 - R_2)}{R_2 + (1+\mu_2)(p_1 - E_1 - R_2)}$$

$$\frac{\mu_2 (1+\mu_2) R_2 \left\{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_1}{p_1 - E_1 - R_2}\right)^2}\right\}}{\left(1 + \mu_2 + \frac{R_2}{p_1 - E_1 - R_2}\right)\left\{(1+\mu_2)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_1}{p_1 - E_1 - R_2}\right)^2} + \frac{R_2}{p_1 - E_1 - R_2}\right\}},$$

$$q_2 = - \frac{\mu_2 \frac{R_2}{p_1 - E_1 - R_2}}{(1+\mu_2)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_1}{p_1 - E_1 - R_2}\right)^2} + \frac{R_2}{p_1 - E_1 - R_2}} q_1,$$

$$r_2 = - \frac{\mu_2 \frac{R_2}{p_1 - E_1 - R_2}}{(1+\mu_2)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_1}{p_1 - E_1 - R_2}\right)^2} + \frac{R_2}{p_1 - E_1 - R_2}} r_1;$$

$$p_3 - R_3 = - \frac{\mu_3 R_3 (p_2 - E_2 - R_3)}{R_3 + (1+\mu_3)(p_2 - E_2 - R_3)}$$

$$- \frac{\mu_3 (1+\mu_3) R_3 \left\{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_2}{p_2 - E_2 - R_3}\right)^2}\right\}}{\left(1 + \mu_3 + \frac{R_3}{p_2 - E_2 - R_3}\right)\left\{(1+\mu_3)\sqrt{1+\left(\frac{\varrho_2}{p_2 - E_2 - R_3}\right)^2} + \frac{R_3}{p_2 - E_2 - R_3}\right\}},$$

$$q_3 = - \frac{\mu_3 \frac{R_3}{p_2 - E_2 - R_3}}{(1+\mu_3)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_2}{p_2 - E_2 - R_3}\right)^2} + \frac{R_3}{p_2 - E_2 - R_3}} q_2,$$

$$r_3 = - \frac{\mu_3 \frac{R_3}{p_2 - E_2 - R_3}}{(1+\mu_3)\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_2}{p_2 - E_2 - R_3}\right)^2} + \frac{R_3}{p_2 - E_2 - R_3}} r_2;$$

u. s. w.

Nehmen wir jetzt an, dass der absolute Werth der Grösse p im Verhältniss zu der Entfernung ϱ des Punktes $(p\ q\ r)$ von der Axe des Systems, und im Verhältniss zu den absoluten Werthen aller das System bestimmenden Elemente sehr gross ist, und bezeichnen durch

$$i^{(1)},\ i_2^{(1)},\ i_3^{(1)},\ i_4^{(1)},\ i_5^{(1)},\ \ldots\ldots$$

und durch

$$i_1^{(2)},\ i_2^{(2)},\ i_3^{(2)},\ i_4^{(2)},\ i_5^{(2)},\ \ldots\ldots$$

Grössen, deren absolute Werthe in Bezug auf die gemachte Voraussetzung als sehr kleine Grössen respective von der ersten und zweiten Ordnung zu betrachten sind; so wird man sich mittelst einer aufmerksamen Betrachtung der obigen Gleichungen leicht von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen überzeugen:

$$p_1 - R_1 = - \frac{\mu_1 R_1 (p - R_1)}{R_1 + (1+\mu_1)(p - R_1)} + i_1^{(2)},$$

$$q_1 = i_1^{(1)},\quad r_1 = i_2^{(1)},\quad \varrho_1 = i_3^{(1)};$$

$$p_2 - R_2 = - \frac{\mu_2 R_2 (p_1 - E_1 - R_2)}{R_2 + (1+\mu_2)(p_1 - E_1 - R_2)} + i_2^{(2)},$$

$$q_2 = i_4^{(1)},\quad r_2 = i_5^{(1)},\quad \varrho_2 = i_6^{(1)};$$

$$p_3 - R_3 = -\frac{\mu_3 R_3 (p_2 - E_2 - R_3)}{R_3 + (1+\mu_3)(p_2 - E_2 - R_3)} + i_3^{(2)},$$

$$q_3 = i_7^{(1)}, \quad r_3 = i_8^{(1)}, \quad \varrho_3 = i_9^{(1)};$$

$$p_4 - R_4 = -\frac{\mu_4 R_4 (p_3 - E_3 - R_4)}{R_4 + (1+\mu_4)(p_3 - E_3 - R_4)} + i_4^{(2)},$$

$$q_4 = i_{10}^{(1)}, \quad r_4 = i_{11}^{(1)}, \quad \varrho_4 = i_{12}^{(1)};$$

u. s. w.

Hieraus, in Verbindung mit den Gleichungen 2), ergeben sich zur Bestimmung der Grössen

$$p_1 - R_1, \quad q_1, \quad r_1;$$
$$p_2 - R_2, \quad q_2, \quad r_2;$$
$$p_3 - R_3, \quad q_3, \quad r_3;$$
$$p_4 - R_4, \quad q_4, \quad r_4;$$

u. s. w.

unter der oben gemachten Voraussetzung die folgenden Näherungsformeln:

$$5) \quad p_1 - R_1 = -\frac{\mu_1 R_1 (p - R_1)}{R_1 + (1+\mu_1)(p - R_1)},$$

$$q_1 = \frac{p_1 - R_1}{p - R_1} q, \quad r_1 = \frac{p_1 - R_1}{p - R_1} r;$$

$$p_2 - R_2 = -\frac{\mu_2 R_2 (p_1 - E_1 - R_2)}{R_2 + (1+\mu_2)(p_1 - E_1 - R_2)},$$

$$q_2 = \frac{p_2 - R_2}{p_1 - E_1 - R_2} q_1, \quad r_2 = \frac{p_2 - R_2}{p_1 - E_1 - R_2} r_1;$$

$$p_3 - R_3 = -\frac{\mu_3 R_3 (p_2 - E_2 - R_3)}{R_3 + (1+\mu_3)(p_2 - E_2 - R_3)},$$

$$q_3 = \frac{p_3 - R_3}{p_2 - E_2 - R_3} q_2, \quad r_3 = \frac{p_3 - R_3}{p_2 - E_2 - R_3} r_2;$$

$$p_4 - R_4 = -\frac{\mu_4 R_4 (p_3 - E_3 - R_4)}{R_4 + (1+\mu_4)(p_3 - E_3 - R_4)},$$

$$q_4 = \frac{p_4 - R_4}{p_3 - E_3 - R_4} q_3, \quad r_4 = \frac{p_4 - R_4}{p_3 - E_3 - R_4} r_3;$$

u. s. w.

welche man aber auch auf folgende Art ausdrücken kann:

$$6)\quad p_1 = -\frac{R_1 p}{\mu_1 R_1 - (1+\mu_1) p},$$

$$q_1 = \frac{\mu_1 R_1 q}{\mu_1 R_1 - (1+\mu_1) p},$$

$$r_1 = \frac{\mu_1 R_1 r}{\mu_1 R_1 - (1+\mu_1) p};$$

$$p_2 = -\frac{R_2 (p_1 - E_1)}{\mu_2 R_2 - (1+\mu_2)(p_1 - E_1)},$$

$$q_2 = \frac{\mu_2 R_2 q_1}{\mu_2 R_2 - (1+\mu_2)(p_1 - E_1)},$$

$$r_2 = \frac{\mu_2 R_2 r_1}{\mu_2 R_2 - (1+\mu_2)(p_1 - E_1)};$$

$$p_3 = -\frac{R_3 (p_2 - E_2)}{\mu_3 R_3 - (1+\mu_3)(p_2 - E_2)},$$

$$q_3 = \frac{\mu_3 R_3 q_2}{\mu_3 R_3 - (1+\mu_3)(p_2 - E_2)},$$

$$r_3 = \frac{\mu_3 R_3 r_2}{\mu_3 R_3 - (1+\mu_3)(p_2 - E_2)};$$

$$p_4 = -\frac{R_4 (p_3 - E_3)}{\mu_4 R_4 - (1+\mu_4)(p_3 - E_3)},$$

$$q_4 = \frac{\mu_4 R_4 q_3}{\mu_4 R_4 - (1+\mu_4)(p_3 - E_3)},$$

$$r_4 = \frac{\mu_4 R_4 r_3}{\mu_4 R_4 - (1+\mu_4)(p_3 - E_3)};$$

u. s. w.

Setzt man

$$7)\quad n_1 = \frac{1}{\mu_1},\quad n_2 = \frac{1}{\mu_2},\quad n_3 = \frac{1}{\mu_3},\quad n_4 = \frac{1}{\mu_4},\ \ldots;$$

so werden die vorhergehenden Gleichungen:

$$8)\quad p_1 = -\frac{n_1 R_1 p}{R_1 - (n_1+1)p},$$

$$q_1 = \frac{R_1 q}{R_1 - (n_1+1)p},$$

$$r_1 = \frac{R_1 r}{R_1 - (n_1+1)p};$$

$$p_2 = -\frac{n_2 R_2 (p_1 - E_1)}{R_2 - (n_2+1)(p_1 - E_1)},$$

$$q_2 = \frac{R_2 q_1}{R_2 - (n_2+1)(p_1 - E_1)},$$

$$r_2 = \frac{R_2 r_1}{R_2 - (n_2+1)(p_1 - E_1)};$$

$$p_3 = -\frac{n_3 R_3 (p_2 - E_2)}{R_3 - (n_3+1)(p_2 - E_2)},$$

$$q_3 = \frac{R_3 q_2}{R_3 - (n_3+1)(p_2 - E_2)},$$

$$r_3 = \frac{R_3 r_2}{R_3 - (n_3+1)(p_2 - E_2)};$$

$$p_4 = -\frac{n_4 R_4 (p_3 - E_3)}{R_4 - (n_4+1)(p_3 - E_3)},$$

$$q_4 = \frac{R_4 q_3}{R_4 - (n_4+1)(p_3 - E_3)},$$

$$r_4 = \frac{R_4 r_3}{R_4 - (n_4+1)(p_3 - E_3)};$$

u. s. w.

und können auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$9)\quad p_1 = -\frac{n_1 R_1 p}{R_1 - (n_1+1)p},$$

$$q_1 = -\frac{1}{n_1}\cdot\frac{p_1}{p}q,\quad r_1 = -\frac{1}{n_1}\cdot\frac{p_1}{p}r;$$

$$p_2 = -\frac{n_2 R_2 (p_1 - E_1)}{R_2 - (n_2 + 1)(p_1 - E_1)},$$

$$q_2 = -\frac{1}{n_2} \cdot \frac{p_2}{p_1 - E_1} q_1, \quad r_2 = -\frac{1}{n_2} \cdot \frac{p_2}{p_1 - E_1} r_1;$$

$$p_3 = -\frac{n_3 R_3 (p_2 - E_2)}{R_3 - (n_3 + 1)(p_2 - E_2)},$$

$$q_3 = -\frac{1}{n_3} \cdot \frac{p_3}{p_2 - E_2} q_2, \quad r_3 = -\frac{1}{n_3} \cdot \frac{p_3}{p_2 - E_2} r_2;$$

$$p_4 = -\frac{n_4 R_4 (p_3 - E_3)}{R_4 - (n_4 + 1)(p_3 - E_3)},$$

$$q_4 = -\frac{1}{n_4} \cdot \frac{p_4}{p_3 - E_3} q_3, \quad r_4 = -\frac{1}{n_4} \cdot \frac{p_4}{p_3 - E_3} r_3;$$

u. s. w.

§. 16.

Wir wollen jetzt bloss eine Kugelfläche betrachten, und dazu die erste in dem vorher betrachteten Systeme wählen, in welchem Falle wir also nach 8) die folgenden, bekanntlich aber bloss näherungsweise richtigen Gleichungen haben:

$$10) \quad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{n_1 R_1 p}{R_1 - (n_1 + 1) p}, \\ q_1 = \dfrac{R_1 q}{R_1 - (n_1 + 1) p}, \\ r_1 = \dfrac{R_1 r}{R_1 - (n_1 + 1) p}. \end{cases}$$

Die erste dieser drei Gleichungen kann, wie man leicht findet, auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$11) \quad \frac{1}{p} + \frac{n_1}{p_1} = \frac{n_1 + 1}{R_1}.$$

Bezeichnen wir nun die Gränzen, denen p und p_1 sich nähern, wenn man sich respective den absoluten Werth von p_1 und den absoluten Werth von p dem Unendlichen nähern lässt, durch f und f_1, so ist nach 11) offenbar:

$$12)\quad \frac{1}{f} = \frac{n_1 + 1}{R_1}, \quad \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_1 + 1}{R_1};$$

also

$$13)\quad f = \frac{R_1}{n_1 + 1}, \quad f_1 = \frac{n_1 R_1}{n_1 + 1}.$$

Zieht man jede der beiden Gleichungen 12) von der Gleichung 11) ab, so erhält man:

$$14)\quad \frac{1}{p} + \frac{n_1}{p_1} - \frac{1}{f} = 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_1}{f_1} = 0$$

oder

$$15)\quad \frac{1}{p} + \frac{n_1}{p_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{p} + \frac{n_1}{p_1} = \frac{n_1}{f_1}.$$

Also ist

$$\frac{n_1}{p_1} = -\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{f}\right) = \frac{p - f}{fp},$$

$$\frac{1}{p} = -n_1\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{f_1}\right) = n_1\frac{p_1 - f_1}{f_1 p_1};$$

und folglich

$$16)\quad p = \frac{f_1 p_1}{n_1(p_1 - f_1)}, \quad p_1 = \frac{n_1 fp}{p - f}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen in einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung

$$17)\quad (p - f)(p_1 - f_1) = ff_1,$$

und folglich nach 13):

$$18)\quad (p - f)(p_1 - f_1) = n_1\left(\frac{R_1}{n_1 + 1}\right)^2,$$

oder

$$19)\quad (p - f)(p_1 - f_1) = \left(\frac{R_1 \curlyvee n_1}{n_1 + 1}\right)^2.$$

Nach der zweiten und dritten der Gleichungen 10) ist

$$\frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1} = 1 - (n_1 + 1)\frac{p}{R_1},$$

und folglich

$$\frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1} = 1 - (n_1 + 1)\frac{f}{R_1} - (n_1 + 1)\frac{p - f}{R_1};$$

also, weil nach der ersten der beiden Gleichungen 13)

$$1-(n_1+1)\,\frac{f}{R_1}=0$$

ist:

$$20)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{r}{r_1}=-\frac{n_1+1}{R_1}\,(p-f);$$

folglich nach 19):

$$21)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{r}{r_1}=-\frac{n_1 R_1}{n_1+1}\cdot\frac{1}{p_1-f_1}.$$

Multiplicirt man 20) und 21) in einander, so erhält man

$$22)\quad \left(\frac{q}{q_1}\right)^2=\left(\frac{r}{r_1}\right)^2=n_1\,\frac{p-f}{p_1-f_1}.$$

Wir wollen nun

$$23)\quad M_1=-\frac{R_1\Upsilon n_1}{n_1+1}$$

setzen, und die Grösse M_1 den Modulus der betrachteten Kugelfläche nennen. Dann ist nach dem Vorhergehenden

$$24)\quad (p-f)(p_1-f_1)=M_1{}^2,$$

und

$$25)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{p-f}{\frac{M_1}{\Upsilon n_1}}=\frac{M_1\Upsilon n_1}{p_1-f_1}.$$

Im Falle der gewöhnlichen Reflexion ist $n_1=1$, und folglich

$$26)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{p-f}{M_1}=\frac{M_1}{p_1-f_1}.$$

§. 17.

Auf ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen eine Kugelfläche, wollen wir nun ein System zweier Kugelflächen betrachten, und wählen dazu die beiden ersten Kugelflächen des in §. 14. und §. 15. betrachteten Systems. Dann haben wir nach 8) die folgenden näherungsweise richtigen Gleichungen:

$$27)\quad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{n_1 R_1 p}{R_1 - (n_1+1)p}, \\ q_1 = \dfrac{R_1 q}{R_1 - (n_1+1)p}, \\ r_1 = \dfrac{R_1 r}{R_1 - (n_1+1)p}; \\ p_2 = -\dfrac{n_2 R_2 (p_1 - E_1)}{R_2 - (n_2+1)(p_1 - E_1)}, \\ q_2 = \dfrac{R_2 q_1}{R_2 - (n_2+1)(p_1 - E_1)}, \\ r_2 = \dfrac{R_2 r_1}{R_2 - (n_2+1)(p_1 - E_1)}. \end{cases}$$

Bestimmt man aus der vierten Gleichung die Grösse $p_1 - E_1$, so erhält man

$$p_1 - E_1 = -\frac{R_2 p_2}{n_2 R_2 - (n_2+1)p_2};$$

und verbindet man hiermit nun die erste der obigen sechs Gleichungen, so ergiebt sich die Gleichung

$$28)\quad \frac{n_1 R_1 p}{R_1 - (n_1+1)p} - \frac{R_2 p_2}{n_2 R_2 - (n_2+1)p_2} = -E_1,$$

welche man mittelst leichter Rechnung auf die folgende Form bringt:

$$29)\quad \frac{1}{p} - \frac{n_1 n_2}{p_2} - \left\{\frac{n_1+1}{R_1} - \frac{n_1(n_2+1)}{R_2}\right\} = E_1\left(\frac{1}{p} - \frac{n_1+1}{R_1}\right)\left(\frac{n_2}{p_2} - \frac{n_2+1}{R_2}\right),$$

oder auf die Form

$$30)\quad \frac{\frac{1}{n_1}}{p} - \frac{n_2}{p_2} - \left(\frac{\frac{1}{n_1}+1}{R_1} - \frac{n_2+1}{R_2}\right) = E_1\left(\frac{\frac{1}{n_1}}{p} - \frac{\frac{1}{n_1}+1}{R_1}\right)\left(\frac{n_2}{p_2} - \frac{n_2+1}{R_2}\right),$$

d. i. nach 7):

$$30^*) \quad \frac{\mu_1}{p} - \frac{n_2}{p_2} - \left(\frac{\mu_1+1}{R_1} - \frac{n_2+1}{R_2}\right)$$
$$= E_1 \left(\frac{\mu_1}{p} - \frac{\mu_1+1}{R_1}\right)\left(\frac{n_2}{p_2} - \frac{n_2+1}{R_2}\right).$$

Wenn aber $n_1 n_2 = 1$ ist, so werden diese Gleichungen, wie man leicht findet:

$$31) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p_2} - (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E_1}{n_1}\left(\frac{1}{p} - \frac{n_1+1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{p_2} - \frac{n_1+1}{R_2}\right).$$

Ferner ergiebt sich aus 27):

$$\frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = \left\{1-(n_1+1)\frac{p}{R_1}\right\}\left\{1-(n_2+1)\frac{p_1-E_1}{R_2}\right\};$$

und folglich, weil nach dem Obigen, wie man leicht findet,

$$1-(n_2+1)\frac{p_1-E_1}{R_2} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{n_2}+1\right)\frac{p_2}{R_2}}$$

ist:

$$32) \quad \frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = \frac{1-(n_1+1)\frac{p}{R_1}}{1-\left(\frac{1}{n_2}+1\right)\frac{p_2}{R_2}};$$

d. i. nach 7):

$$32^*) \quad \frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = \frac{1-(n_1+1)\frac{p}{R_1}}{1-(\mu_2+1)\frac{p_2}{R_2}};$$

also für $n_1 n_2 = 1$:

$$33) \quad \frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = \frac{1-(n_1+1)\frac{p}{R_1}}{1-(n_1+1)\frac{p_2}{R_2}}.$$

Bezeichnen wir die Gränzen, denen p und p_2 sich nähern, wenn sich respective der absolute Werth von p_2 und der absolute Werth von p dem Unendlichen nähert, durch f und f_2; so ist, wenn wir jetzt bloss den für die wirkliche Anwendung allein wichtigen Fall $n_1 n_2 = 1$ in's Auge fassen, nach 31):

$$34)\quad \begin{cases} \frac{1}{f} - (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{E_1}{n_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\left(\frac{1}{f} - \frac{n_1+1}{R_1}\right), \\ \frac{1}{f_2} + (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E_1}{n_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_1}\left(\frac{1}{f_2} - \frac{n_1+1}{R_2}\right). \end{cases}$$

Verbindet man die erste dieser beiden Gleichungen durch Subtraction, die zweite durch Addition mit der Gleichung 31), so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{f}$$
$$= \frac{E_1}{n_1}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_2} - \frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{1}{p_2} + \frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{1}{f}\right),$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{f_2}$$
$$= \frac{E_1}{n_1}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_2} - \frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{1}{p_2} + \frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{1}{f_2}\right);$$

oder

$$\frac{E_1}{n_1}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_2}$$
$$= \left(1 + \frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\frac{1}{p} - \left(1 - \frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\frac{1}{p_2} - \left(1 + \frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\frac{1}{f},$$

$$\frac{E_1}{n_1}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_2}$$
$$= \left(1 + \frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\frac{1}{p} - \left(1 - \frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\frac{1}{p_2} + \left(1 - \frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\frac{1}{f_2}.$$

Nun ist aber nach 34), wie man leicht findet:

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f_2} = -\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)E_1\left(\frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{f} - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f_2}\right),$$

also

$$\frac{E_1}{n_1} = -\frac{\frac{1}{f} + \frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{f} - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f_2}\right)},$$

und folglich

$$1 - \frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{E_1}{n_1} = \frac{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f_2}}\cdot\frac{1}{f},$$

$$1 + \frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1} = -\frac{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f_2}}\cdot\frac{1}{f_2}.$$

Führt man diese Ausdrücke in einen jeden der beiden obigen Ausdrücke von

$$\frac{E_1}{n_1}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_2}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$35)\quad \left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}\right)\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_2}$$
$$= (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{p_2}+\frac{1}{f_2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{f_2}\right),$$

aus welcher sich ferner ohne Schwierigkeit die folgenden Formeln ergeben:

$$36)\quad \begin{cases} \frac{1}{p} = \dfrac{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{f_2}\right)\frac{1}{f}}{\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}\right)\frac{1}{p_2}-(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{f_2}}, \\ \frac{1}{p_2} = \dfrac{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f_2}}{\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}\right)\frac{1}{p}-(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{f}}; \end{cases}$$

oder

$$37)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}\right)\frac{1}{p_2}-(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{f_2}\right)\frac{1}{f}}, \\ p_2 = \dfrac{\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}\right)\frac{1}{p}-(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{f}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f_2}}; \end{cases}$$

oder auch

$$38)\quad \begin{cases} p = -\dfrac{\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}\right) f_2 - (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) p_2}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(p_2-f_2)}\, f, \\ p_2 = -\dfrac{\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}\right) f - (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) p}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(p-f)}\, f_2; \end{cases}$$

woraus sich ferner leicht

$$39)\quad \begin{cases} p - f = -\dfrac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2} - (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(p_2-f_2)}\, ff_2, \\ p_2 - f_2 = -\dfrac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2} - (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(p-f)}\, ff_2; \end{cases}$$

also

$$40)\quad (p-f)(p_2-f_2) = \left\{1 - \frac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}\right\} ff_2$$

ergiebt.

Weil nun nach 34), wie man leicht findet:

$$41)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{f} = \dfrac{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1} + (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}{1+\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}}, \\ \dfrac{1}{f_2} = -\dfrac{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1} + (n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}{1-\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{E_1}{n_1}} \end{cases}$$

ist, so ist

$$\frac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$$

$$= -\frac{\frac{E_1}{n_1}\left\{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}+(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right\}}{\left(1-\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\left(1+\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)},$$

und folglich

$$1-\frac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} = \frac{1}{\left(1-\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)\left(1+\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right)},$$

also

$$42)\quad \left\{1-\frac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}\right\} ff_2$$

$$= -\left\{\frac{1}{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}+(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}\right\}.$$

Daher ist nach 40)

$$43)\quad (p-f)(p_2-f_2)$$

$$= -\left\{\frac{1}{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}+(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}\right\}^2$$

oder

$$43^*)\quad (p-f)(p_2-f_2)$$

$$= -\left\{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}+(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right\}^{-2}.$$

Nach 33) ist

$$\frac{q}{q_2}=\frac{r}{r_2}=\frac{1-(n_1+1)\frac{p}{R_1}}{1-(n_1+1)\frac{p_2}{R_2}},$$

also

$$\frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = \frac{1-(n_1+1)\frac{f}{R_1}-(n_1+1)\frac{p-f}{R_1}}{1-(n_1+1)\frac{f_2}{R_2}-(n_1+1)\frac{p_2-f_2}{R_2}};$$

und weil nun nach 41)

$$44)\quad \begin{cases} f = \dfrac{1+\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}}{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}+(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}, \\ f_2 = -\dfrac{1-\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}}{\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}+(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}; \end{cases}$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$1-(n_1+1)\frac{f}{R_1} = \frac{R_1}{R_1-R_2-\frac{n_1+1}{n_1}E_1},$$

$$1-(n_1+1)\frac{f_2}{R_2} = -\frac{R_2}{R_1-R_2-\frac{n_1+1}{n_1}E_1};$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$K = \frac{1}{R_1-R_2-\frac{n_1+1}{n_1}E_1}$$

gesetzt wird,

$$1-(n_1+1)\frac{f}{R_1} = KR_1,\ 1-(n_1+1)\frac{f_2}{R_2} = -KR_2$$

ist; so ist

$$\frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = -\frac{KR_1-(n_1+1)\frac{p-f}{R_1}}{KR_2+(n_1+1)\frac{p_2-f_2}{R_2}}.$$

Nach 42) ist nun

$$45)\quad (p-f)(p_2-f_2)$$
$$= -\left\{\frac{R_1 R_2}{(n_1+1)(R_1-R_2-\frac{n_1+1}{n_1}E_1)}\right\}^2 = -\left(\frac{K R_1 R_2}{n_1+1}\right)^2,$$

also

$$p_2-f_2 = -\frac{K^2 R_1^2 R_2^2}{(n_1+1)^2 (p-f)}.$$

Führt man diesen Werth von p_2-f_2 in den obigen Ausdruck von

$$\frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2}$$

ein, und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$46)\quad \frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = \frac{(n_1+1)(p-f)}{K R_1 R_2} = -\frac{K R_1 R_2}{(n_1+1)(p_2-f_2)}.$$

Wir wollen nun

$$47)\quad M_1 = \frac{R_1 R_2}{(n_1+1)(R_1-R_2-\frac{n_1+1}{n_1}E_1)}$$

setzen, und die Grösse M_1 den Modulus des im Vorhergehenden betrachteten Systems zweier Kugelflächen nennen. Dann ist

$$M_1 = \frac{K R_1 R_2}{n_1+1},$$

und folglich nach 45) und 46)

$$48)\quad (p-f)(p_2-f_2) = -M_1^2$$

und

$$49)\quad \frac{q}{q_2} = \frac{r}{r_2} = \frac{p-f}{M_1} = -\frac{M_1}{p_2-f_2}.$$

Den Modulus M_1 kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$50)\quad M_1 = -\frac{1}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}}$$

oder

$$50^*)\quad M_1 = -\left\{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R_2}\cdot\frac{E_1}{n_1}\right\}^{-1}.$$

Eliminirt man die Grösse $\frac{E_1}{n_1}$ mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$\frac{E_1}{n_1} = -\frac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f_2}\right)},$$

so erhält man:

$$51)\quad M_1 = \frac{1}{n_1+1}\cdot\frac{\frac{R_1}{f}-\frac{R_2}{f_2}}{\frac{1}{R_2}\cdot\frac{R_1}{f}+\frac{1}{R_1}\cdot\frac{R_2}{f_2}}$$

oder

$$52)\quad M_1 = -\frac{R_1 R_2}{n_1+1}\cdot\frac{fR_2-f_2R_1}{fR_2^2+f_2R_1^2}.$$

Auch ergiebt sich aus der Vergleichung von 40) und 48) für das Quadrat des Modulus der folgende Ausdruck:

$$53)\quad M_1^2 = -\left\{1-\frac{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}}{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}\right\}ff_2.$$

Viertes Kapitel.

Von den Spiegel- und Linsen-Systemen.

§. 18.

Jede Kugelfläche, welche die Lichtstrahlen nach dem gewöhnlichen Gesetze der Zurückwerfung reflectirt, wird ein sphärischer Spiegel, und jeder von zwei Kugelflächen begränzte Körper, welcher die Lichtstrahlen nach dem gewöhnlichen Gesetze der Brechung bricht, wird eine Linse genannt. Spiegel und Linsen, welche eine solche Lage im Raume haben, dass die Mittel-

punkte der sämmtlichen dieselben bestimmenden Kugelflächen in einer und derselben geraden Linie liegen, bilden ein Spiegel- und Linsen-System, und die in Rede stehende gerade Linie wird die Axe dieses Systems genannt. Die einzelnen Spiegel und Linsen, aus denen ein Spiegel- und Linsen-System besteht, sollen dessen Elemente, und zwar, wenn das System aus i Elementen besteht, nach der Reihe das

1ste, 2te, 3te, 4te, 5te, ... ite

Element genannt werden. Die Punkte, in denen die Axe des Systems von den die Elemente desselben bestimmenden Kugelflächen geschnitten wird, heissen die Scheitel der entsprechenden Elemente. Jede Linse hat zwei Scheitel, von denen wir immer den, welcher der von den einfallenden Strahlen getroffenen Kugelfläche entspricht, den vordern Scheitel, den andern den hintern Scheitel nennen wollen. Jeder Spiegel hat natürlich im eigentlichen Sinne nur einen Scheitel. Indess wollen wir im Folgenden der Kürze des Ausdrucks wegen auch jedem Spiegel zwei Scheitel, einen vordern und einen hintern, beilegen, wobei aber nicht zu übersehen ist, dass in diesem Falle die beiden Scheitel zusammenfallen, die Entfernung derselben von einander also verschwindet.

Durch alle Scheitel der Elemente als Anfangspunkte denken wir uns auf ähnliche Art wie im vorhergehenden Kapitel wieder sämmtlich unter einander parallele rechtwinklige Coordinatensysteme gelegt, deren erste Axen alle in die Axe des Systems fallen, bezeichnen die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen des vordern Scheitels des 2ten Elements von dem hintern Scheitel des 1sten Elements, des vordern Scheitel des 3ten Elements von dem hintern Scheitel des 2ten Elements, des vordern Scheitels des 4ten Elements von dem hintern Scheitel des 3ten Elements, u. s. w., des vordern Scheitels des $i$ten Elements von dem hintern Scheitel des $(i-1)$ ten Elements, wobei diese Entfernungen natürlich von den hintern Scheiteln des 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, u. s. w. $(i-1)$ten Elements an gerechnet werden, nach der Reihe durch

$$E_1, E_2, E_3, E_4, \ldots E_{i-1} ;$$

und betrachten die Halbmesser aller einzelnen Kugelflächen als positiv oder als negativ, jenachdem sie von den entsprechenden Scheiteln an nach der Seite der positiven oder nach der Seite

der negativen ersten Coordinaten hin liegen. Ferner sollen unter diesen Voraussetzungen die Moduli des

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... $i$ten

Elements respective durch

$$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, \ldots M_i$$

bezeichnet werden.

Der Modulus M eines Spiegels, dessen nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder als negativ betrachteter Halbmesser R ist, wird nach III. 23) mittelst der Formel

$$1) \quad M = -\frac{1}{2} R$$

gefunden.

Der Modulus M einer Linse, deren dem vordern und hintern Scheitel entsprechende, nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Halbmesser R und R' sind, und deren hinterer Scheitel von dem vorderen die nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung D hat, d. h., wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, deren nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Dicke D ist, wird, wenn n das negativ genommene Brechungsverhältniss bezeichnet, wie leicht aus den im vorhergehenden Kapitel entwickelten Formeln erhellen wird, mittelst der Formel

$$2) \quad M = \frac{RR'}{(n+1)\left(R - R' - \frac{n+1}{n} D\right)}$$

oder

$$3) \quad M = -\left\{(n+1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) + \frac{n+1}{R} \cdot \frac{n+1}{R'} \cdot \frac{D}{n}\right\}^{-1}$$

gefunden.

Denken wir uns nun, dass Strahlen, welche, nöthigenfalls gehörig verlängert, sämmtlich durch einen Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf das durch den vordern Scheitel des 1sten Elements als Anfang gelegte System wir durch p, q, r bezeichnen wollen, gehen, auf das 1ste Element fallen, so wird, wie aus dem vorhergehenden Kapitel mit völliger Deutlichkeit erhellet, ein dem 1sten Elemente entsprechendes Bild des Punktes (pqr) entstehen,

dessen Coordinaten in Bezug auf das durch den hintern Scheitel des 1sten Elements als Anfang gelegte System durch p_1, q_1, r_1 bezeichnet werden mögen; von diesem Bilde $(p_1\ q_1\ r_1)$ wird, wenn nur die abgelenkten Strahlen das 2te Element treffen, ein dem 2ten Elemente entsprechendes Bild entstehen, welches das dem 2ten Elemente entsprechende Bild des Punktes $(p\ q\ r)$ genannt werden, und in Bezug auf das durch den hintern Scheitel des 2ten Elements als Anfang gelegte System durch die Coordinaten p_2, q_2, r_2 bestimmt sein soll; von diesem Bilde $(p_2\ q_2\ r_2)$ wird auf ähnliche Weise ein dem 3ten Elemente entsprechendes Bild entstehen, welches das dem 3ten Elemente entsprechende Bild des Punktes $(p\ q\ r)$ genannt werden, und in Bezug auf das durch den hintern Scheitel des 3ten Elements als Anfang gelegte System durch die Coordinaten p_3, q_3, r_3 bestimmt sein soll; wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar; zuletzt wird eben so ein dem $i$ten Elemente entsprechendes Bild des Punktes $(p\ q\ r)$ entstehen, dessen Coordinaten in Bezug auf das durch den hintern Scheitel des $i$ten Elements als Anfang gelegte System wir durch p_i, q_i, r_i bezeichnen wollen.

Wenn wir die Coordinaten der Bilder

$$(p_1\ q_1\ r_1),\ (p_2\ q_2\ r_2),\ (p_3\ q_3\ r_3),\ \ldots\ (p_{i-1}\ q_{i-1}\ r_{i-1})$$

in Bezug auf die durch die vordern Scheitel des

2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... $i$ten

Elements als Anfangspunkte gelegten Systeme respective durch

$$p'_1,\ q'_1,\ r'_1;\ p'_2,\ q'_2,\ r'_2;\ p'_3,\ q'_3,\ r'_3;\ \ldots\ p'_{i-1},\ q'_{i-1},\ r'_{i-1}$$

bezeichnen, so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar die folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} p_1 - p'_1 = E_1, & q_1 = q'_1, & r_1 = r'_1; \\ p_2 - p'_2 = E_2, & q_2 = q'_2, & r_2 = r'_2; \\ p_3 - p'_3 = E_3, & q_3 = q'_3, & r_3 = r'_3; \\ \text{u. s. w.} \\ p_{i-1} - p'_{i-1} = E_{i-1}, & q_{i-1} = q'_{i-1}, & r_{i-1} = r'_{i-1}. \end{cases}$$

§. 19.

Bezeichnen wir aber jetzt die den Grössen f und f_1 bei der Betrachtung einer Kugelfläche, oder die den Grössen f und f_2

bei der Betrachtung eines Systems zweier Kugelflächen im vorhergehenden Kapitel (§. 16 u. §. 17.) entsprechenden Grössen für das

1ste, 2te, 3te, 4te, 5te, ... *i*te

Element respective durch

$$f_1,\ f'_1;\ f_2,\ f'_2;\ f_3,\ f'_3;\ f_4,\ f'_4;\ \ldots\ f_i,\ f'_i;$$

so haben wir nach III. 24) und III. 48) die folgenden Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} (p - f_1)\,(p_1 - f'_1) = \pm M_1^2, \\ (p'_1 - f_2)\,(p_2 - f'_2) = \pm M_2^2, \\ (p'_2 - f_3)\,(p_3 - f'_3) = \pm M_3^2, \\ \text{u. s. w.} \\ (p'_{i-1} - f_i)\,(p_i - f'_i) = \pm M^2{}_i; \end{cases}$$

in denen im Falle eines Spiegels jederzeit das obere, im Falle einer Linse jederzeit das untere Zeichen zu nehmen ist. Um uns von diesen doppelten Zeichen frei zu machen, wollen wir nun im Folgenden die, jenachdem das Element ein Spiegel oder eine Linse ist, positiv oder negativ genommenen Quadrate der Moduli des

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... *i*ten

Elements respective durch

$$\mathfrak{M}_1,\quad \mathfrak{M}_2,\quad \mathfrak{M}_3,\quad \mathfrak{M}_4,\quad \mathfrak{M}_5,\quad \ldots\quad \mathfrak{M}_i$$

bezeichnen. Dann erhalten die vorhergehenden Gleichungen folgende Form:

$$6)\quad \begin{cases} (p - f_1)\,(p_1 - f'_1) = \mathfrak{M}_1, \\ (p'_1 - f_2)\,(p_2 - f'_2) = \mathfrak{M}_2, \\ (p'_2 - f_3)\,(p_3 - f'_3) = \mathfrak{M}_3, \\ \text{u. s. w.} \\ (p'_{i-1} - f_i)\,(p_i - f'_i) = \mathfrak{M}_i; \end{cases}$$

oder weil nach 4):

$$\begin{aligned} p_1 - f'_1 &= p'_1 + E_1 - f'_1 = p'_1 - f_2 + (E_1 - f'_1 + f_2), \\ p_2 - f'_2 &= p'_2 + E_2 - f'_2 = p'_2 - f_3 + (E_2 - f'_2 + f_3), \\ p_3 - f'_3 &= p'_3 + E_3 - f'_3 = p'_3 - f_4 + (E_3 - f'_3 + f_4), \\ &\text{u. s. w.} \\ p_{i-1} - f'_{i-1} &= p'_{i-1} + E_{i-1} - f'_{i-1} = p'_{i-1} - f_i + (E_{i-1} - f'_{i-1} + f_i); \end{aligned}$$

d. i., wenn wir der Kürze wegen

$$7)\quad \begin{cases} \mathfrak{N}_1 = E_1 - f'_1 + f_2, \\ \mathfrak{N}_2 = E_2 - f'_2 + f_3, \\ \mathfrak{N}_3 = E_3 - f'_3 + f_4, \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \mathfrak{N}_{i-1} = E_{i-1} - f'_{i-1} + f_i \end{cases}$$

setzen, wo natürlich

$$\mathfrak{N}_1,\ \mathfrak{N}_2,\ \mathfrak{N}_3,\ \mathfrak{N}_4,\ \mathfrak{N}_5, \ldots.\ \mathfrak{N}_{i-1}$$

bekannte Grössen sind,

$$\begin{aligned} p_1 - f'_1 &= \mathfrak{N}_1 + p_1 - f_2, \\ p_2 - f'_2 &= \mathfrak{N}_2 + p'_2 - f_3, \\ p_3 - f'_3 &= \mathfrak{N}_3 + p'_3 - f_4, \\ &\text{u. s. w.} \\ p_{i-1} - f'_{i-1} &= \mathfrak{N}_{i-1} + p'_{i-1} - f_i \end{aligned}$$

ist, die Form:

$$8)\quad \begin{cases} (p - f_1)(\mathfrak{N}_1 + p'_1 - f_2) = \mathfrak{M}_1, \\ (p'_1 - f_2)(\mathfrak{N}_2 + p'_2 - f_3) = \mathfrak{M}_2, \\ (p'_2 - f_3)(\mathfrak{N}_3 + p'_3 - f_4) = \mathfrak{M}_3, \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ (p'_{i-2} - f_{i-1})(\mathfrak{N}_{i-1} + p'_{i-1} - f_i) = \mathfrak{M}_{i-1}, \\ (p'_{i-1} - f_i)(p_i - f') \qquad\qquad = \mathfrak{M}_i. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man dieselben der Ordnung von der letzten bis zur ersten nimmt:

$$p_i - f'_i = \frac{\mathfrak{M}_i}{p'_{i-1} - f_i},$$

$$p'_{i-1} - f_i = -\mathfrak{N}_{i-1} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{p'_{i-2} - f_{i-1}},$$

$$p'_{i-2} - f_{i-1} = -\mathfrak{N}_{i-2} + \frac{\mathfrak{M}_{i-2}}{p'_{i-3} - f_{i-2}},$$

u. s. w.

$$p'_3 - f_4 = - \mathfrak{N}_3 + \frac{\mathfrak{M}_3}{p'_2 - f_3},$$

$$p'_2 - f_3 = - \mathfrak{N}_2 + \frac{\mathfrak{M}_2}{p'_1 - f_2},$$

$$p'_1 - f_2 = - \mathfrak{N}_1 + \frac{\mathfrak{M}_1}{p - f_1};$$

und wenn man die obigen Gleichungen in der Ordnung von der ersten bis zur letzten nimmt, so ergiebt sich:

$$p - f_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}_1 + p'_1 - f_2},$$

$$p'_1 - f_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_2 + p'_2 - f_3},$$

$$p'_2 - f_3 = \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_3 + p'_3 - f_4},$$

u. s. w.

$$p'_{i-3} - f_{i-2} = \frac{\mathfrak{M}_{i-2}}{\mathfrak{N}_{i-2} + p'_{i-2} - f_{i-1}},$$

$$p'_{i-2} - f_{i-1} = \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-1} + p'_{i-1} - f_i},$$

$$p'_{i-1} - f_i = \frac{\mathfrak{M}_i}{p_i - f'_i}.$$

Aus der ersten dieser beiden Reihen von Gleichungen erhält man ohne Schwierigkeit durch successive Substitution:

$$9)\quad p_i - f_i = -\frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{N}_{i-1}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-2}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-2}}{\mathfrak{N}_{i-3}} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1} - \frac{\mathfrak{M}_1}{p - f_1};$$

und eben so leicht ergiebt sich aus der zweiten der beiden obigen Reihen von Gleichungen:

$$10)\quad p - f_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}_1} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_3} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}^i{}_{-2}}{\mathfrak{N}_{i-2}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-1}} + \frac{\mathfrak{M}_i}{p_i - f'_i}.$$

Jeder dieser beiden Kettenbrüche besteht aus i, d. h. gerade aus eben so vielen Gliedern, als das System Elemente enthält. Zur Entwickelung derselben ist nur die Berechnung der Moduli

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5, \ldots M_i$$

der einzelnen Elemente, aus denen immer auch leicht die durch

$$\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \mathfrak{M}_3,\ \mathfrak{M}_4,\ \mathfrak{M}_5, \ldots\ \mathfrak{M}_i$$

bezeichneten Grössen gefunden werden können, und der oben durch

$$\mathfrak{N}_1,\ \mathfrak{N}_2,\ \mathfrak{N}_3,\ \mathfrak{N}_4,\ \mathfrak{N}_5, \ldots\ \mathfrak{N}_{i-1}$$

bezeichneten, von den Entfernungen der einzelnen Elemente des Systems von einander abhängenden Grössen erforderlich, welche, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, keiner Schwierigkeit unterliegt.

Bezeichnen wir die Gränzen, welchen bei unserm aus i Elementen bestehenden Systeme die Grössen p und p_i sich nähern, wenn sich respective der absolute Werth von p_i und der absolute Werth von p dem Unendlichen nähern, durch F_i und F'_i, so ist nach 9) und 10):

$$11)\quad F'_i - f'_i = -\frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{N}_{i-1}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-2}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-2}}{\mathfrak{N}_{i-3}} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1}$$

und

$$12)\quad F_i - f_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}_1} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_3} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_{i-2}}{\mathfrak{N}_{i-2}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-1}},$$

wo jeder Kettenbruch nur aus $i-1$ Gliedern besteht.

§. 20.

Für ein aus einem Elemente bestehendes System ist in der ersten der Gleichungen 6) offenbar $f_1 = F_1$, $f'_1 = F'_1$ zu setzen, und wir erhalten daher unmittelbar die folgende Gleichung:

$$13)\quad (p - F_1)(p_1 - F'_1) = \mathfrak{M}_1 .$$

Für ein aus zwei Elementen bestehendes System ist nach 9) und 10):

$$p_2 - f'_2 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1} - \frac{\mathfrak{M}_1}{p - f_1}, \quad p - f_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}_1} + \frac{\mathfrak{M}_2}{p_2 - f'_2};$$

und nach 11) und 12):

$$F'_2 - f'_2 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1}, \quad F_2 - f_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}_1} .$$

Aus der ersten, dritten und vierten dieser vier Gleichungen folgt:

$$p_2 - f'_2 = \frac{\mathfrak{N}_1 (F'_2 - f'_2)}{\mathfrak{N}_1 - \frac{\mathfrak{M}_1}{p - f_1}} = \frac{F'_2 - f'_2}{1 - \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}_1} \cdot \frac{1}{p - f_1}}$$

$$= \frac{F'_2 - f'_2}{1 - \frac{F_2 - f_1}{p - f_1}} = \frac{(F'_2 - f'_2)(p - f_1)}{p - F_2};$$

und eben so ergiebt sich aus der zweiten, dritten und vierten der vier obigen Gleichungen:

$$p - f_1 = \frac{\mathfrak{N}_1 (F_2 - f_1)}{\mathfrak{N}_1 + \frac{\mathfrak{M}_2}{p_2 - f'_2}} = \frac{F_2 - f_1}{1 + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1} \cdot \frac{1}{p_2 - f'_2}}$$

$$= \frac{F_2 - f_1}{1 - \frac{F'_2 - f'_2}{p_2 - f'_2}} = \frac{(F_2 - f_1)(p_2 - f'_2)}{p_2 - F'_2} .$$

Also haben wir jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$(F'_2 - f'_2)(p - f_1) = (p - F_2)(p_2 - f'_2),$$
$$(p_2 - F'_2)(p - f_1) = (F_2 - f_1)(p_2 - f'_2);$$

aus denen sich durch Division

$$\frac{F'_2 - f'_2}{p_2 - F'_2} = \frac{p - F_2}{F_2 - f_1}$$

oder

$$(p - F_2)(p_2 - F'_2) = (F_2 - f_1)(F'_2 - f'_2),$$

oder

$$(p - F_2)(p_2 - F'_2) = (f_1 - F_2)(f'_2 - F'_2)$$

ergiebt. Weil nun aber nach dem Obigen

$$(F_2 - f_1)(F'_2 - f'_2) = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(\mathfrak{N}_1)^2}$$

ist, so ist

$$14) \quad (p - F_2)(p_2 - F'_2) = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(\mathfrak{N}_1)^2}.$$

Aus 13) und 14) sieht man, dass für ein aus einem Elemente bestehendes System das Product

$$(p - F_1)(p_1 - F'_1),$$

und für ein aus zwei Elementen bestehendes System das ganz ähnliche Product

$$(p - F_2)(p_2 - F'_2),$$

eine constante Grösse ist, und es fragt sich nun, ob dieser jedenfalls sehr merkwürdige Satz für jedes aus einer beliebigen Anzahl von Elementen bestehende Spiegel- und Linsen-System als gültig betrachtet werden kann.

Um hierüber zu einer bestimmten Entscheidung zu gelangen, wollen wir den Satz für ein aus $i-1$ Elementen bestehendes System als gültig annehmen, und untersuchen, ob derselbe dann nothwendig auch immer für ein aus i Elementen bestehendes System gültig sein muss, in welchem Falle seine allgemeine Gültigkeit bewiesen sein würde. Denken wir uns jetzt also ein aus i Elementen bestehendes System, so ist für das System der ersten $i-1$ Elemente, wenn $\mathfrak{K}_{i-1}$ eine gewisse constante Grösse bezeichnet, in Folge der gemachten Voraussetzung:

$$(p - F_{i-1})(p_{i-1} - F'_{i-1}) = \mathfrak{K}_{i-1};$$

und für das letzte *i*te Element ist nach 13) mit gehöriger Rücksicht auf die im Obigen eingeführten Bezeichnungen:

$$(p'_{i-1} - f_i)(p_i - f'_i) = \mathfrak{M}_i,$$

oder, weil nach 4)

$$p'_{i-1} = p_{i-1} - E_{i-1}$$

ist,

$$(p_{i-1} - E_{i-1} - f_i)(p_i - f'_i) = \mathfrak{M}_i.$$

Lässt man jetzt den absoluten Werth von p_i sich dem Unendlichen nähern, so nähert sich p der Gränze F_i und p'_{i-1} der Gränze f_i, also, weil nach 4)

$$p_{i-1} = E_{i-1} + p'_{i-1}$$

ist, p_{-1} der Gränze $E_{i-1} + f$; und wegen der Gleichung

$$(p - F_{i-1})(p_{i-1} - F'_{i-1}) = \mathfrak{K}_{i-1}$$

st folglich

$$(F_i - F_{i-1})(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i) = \mathfrak{K}_{i-1}.$$

Lässt man aber jetzt den absoluten Werth von p sich dem Unendlichen nähern, so nähern p_{i-1} und p_i sich respective den Gränzen F'_{i-1} und F'_i, und wegen der Gleichung

$$(p_{i-1} - E_{i-1} - f_i)(p_i - f'_i) = \mathfrak{M}_i$$

ist folglich

$$(F'_{i-1} - E_{i-1} - f_i)(F'_i - f'_i) = \mathfrak{M}_i$$

oder

$$(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i)(F'_i - f'_i) = -\mathfrak{M}_i.$$

Nach dem Vorhergehenden haben wir nun die folgenden Gleichungen:

$$p = F_{i-1} + \frac{\mathfrak{K}_{i-1}}{p_{i-1} - F'_{i-1}},$$

$$F_i = F_{i-1} + \frac{\mathfrak{K}_{i-1}}{E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i}$$

und

$$p_i = f'_i - \frac{\mathfrak{M}_i}{E_{i-1} - p_{i-1} + f_i},$$

$$F'_i = f'_i - \frac{\mathfrak{M}_i}{E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i}.$$

Also ist, wie man durch Subtraction leicht findet:

$$p - F_i = \frac{E_{i-1} - p_{i-1} + f_i}{(p_{i-1} - F'_{i-1})(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i)} \mathfrak{K}_{i-1},$$

$$p_i - F'_i = - \frac{p_{i-1} - F'_{i-1}}{(E_{i-1} - p_{i-1} + f_i)(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i)} \mathfrak{M}_i ;$$

und hieraus ergiebt sich durch Multiplication auf der Stelle

$$15) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = - \frac{\mathfrak{K}_{i-1} \mathfrak{M}_i}{(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i)^2},$$

oder, weil nach 7)

$$E_{i-1} + f_i = \mathfrak{N}_{i-1} + f'_{i-1}$$

ist:

$$16) \quad (p - F_i)(p_i - F_i) = - \frac{\mathfrak{K}_{i-1} \mathfrak{M}_i}{(\mathfrak{N}_{i-1} - F'_{i-1} + f'_{i-1})^2}.$$

Hieraus sieht man, dass der Satz, von welchem oben die Rede war, für ein aus i Elementen bestehendes Spiegel- und Linsen-System gilt, wenn er für ein aus $i - 1$ Elementen bestehendes Spiegel- und Linsen-System gilt, und daher allgemein gültig ist, weil er oben für ein aus einem Elemente, und ein aus zwei Elementen bestehendes Spiegel- und Linsen-System schon als richtig erkannt worden ist.

Setzen wir, analog mit dem Obigen,

$$17) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = \mathfrak{K}_i,$$

so hat sich uns durch die vorhergehende Entwickelung zugleich die bemerkenswerthe Relation

$$18) \quad \mathfrak{K}_i = - \frac{\mathfrak{K}_{i-1} \mathfrak{M}_i}{(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i)^2}$$

$$= - \frac{\mathfrak{K}_{i-1} \mathfrak{M}_i}{(\mathfrak{N}_{i-1} - F'_{i-1} + f'_{i-1})^2}$$

ergeben, welche uns nun ferner bei der Entwickelung eines independenten Ausdrucks der Grösse $\mathfrak{K}_i$, wozu wir jetzt übergehen wollen, die vortrefflichsten Dienste leisten wird.

§. 21.

Bei dieser Untersuchung wollen wir

$$19)\quad \frac{Z_i}{N_i} = \mathfrak{N}_i + \frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{N}_{i-1}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-2}} + \ddots + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}}$$

und zugleich

$$20)\quad \frac{Z_0}{N_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{Z_1}{N_1} = \frac{\mathfrak{N}_1}{1}$$

setzen, d. h. Zähler und Nenner des dem Kettenbruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 19) gleichen gemeinen Bruchs durch Z_i und N_i bezeichnen, und zugleich

$$Z_0 = 1, \quad N_0 = 0; \quad Z_1 = \mathfrak{N}_1, \quad N_1 = 1$$

setzen.

Weil wegen der Gleichung 19) offenbar

$$\frac{Z_i}{N_i} = \mathfrak{N}_i + \mathfrak{M}_i \cdot \frac{N_{i-1}}{Z_{i-1}} = \frac{\mathfrak{N}_i \cdot Z_{i-1} + \mathfrak{M}_i \cdot N_{i-1}}{Z_{i-1}}$$

ist, so haben wir die beiden folgenden Relationen:

$$21)\quad \begin{cases} Z_i = \mathfrak{N}_i \cdot Z_{i-1} + \mathfrak{M}_i \cdot N_{i-1}, \\ N_i = Z_{i-1}; \end{cases}$$

welche wegen der Gleichungen 20), wie sogleich in die Augen fällt, auch noch für $i = 1$ und $i = 2$ gelten.

Weil nun nach 13) und 14) offenbar

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{K}_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(\mathfrak{N}_1)^2}$$

ist, so ist nach 20)

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{(Z_0)^2}, \quad \mathfrak{K}_2 = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(Z_1)^2},$$

Weil nach 11)

$$\mathfrak{N}_{i-1} - F'_{i-1} + f'_{i-1} = \mathfrak{N}_{i-1} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-2}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-2}}{\mathfrak{N}_{i-3}} + \ddots + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1},$$

d. i. nach 19)

$$\mathfrak{N}_{i-1} - F'_{i-1} + f'_{i-1} = \frac{Z_{i-1}}{N_{i-1}}$$

ist, so ist nach 18)

$$\mathfrak{K}_i = -\frac{\mathfrak{K}_{i-1}(N_{i-1})^2 \mathfrak{M}_i}{(Z_{i-1})^2},$$

und folglich, weil nach der zweiten der Relationen 21)

$$N_{i-1} = Z_{i-2}$$

ist,

$$\mathfrak{K}_i = -\frac{\mathfrak{K}_{i-1}(Z_{i-2})^2 \mathfrak{M}_i}{(Z_{i-1})^2}.$$

Mit Hülfe dieser Relation und des Obigen erhält man nun nach und nach die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{(Z_0)^2},$$

$$\mathfrak{K}_2 = -\frac{\mathfrak{K}_1 (Z_0)^2 \mathfrak{M}_2}{(Z_1)^2} = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(Z_1)^2},$$

$$\mathfrak{K}_3 = -\frac{\mathfrak{K}_2 (Z_1)^2 \mathfrak{M}_3}{(Z_2)^2} = \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{(Z_2)^2},$$

$$\mathfrak{K}_4 = -\frac{\mathfrak{K}_3 (Z_2)^2 \mathfrak{M}_4}{(Z_3)^2} = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4}{(Z_3)^2},$$

$$\mathfrak{K}_5 = -\frac{\mathfrak{K}_4 (Z_3)^2 \mathfrak{M}_5}{(Z_4)^2} = \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \mathfrak{M}_5}{(Z_4)^2},$$

u. s. w.

Daher ist allgemein

$$22) \quad \mathfrak{K}_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i}{(Z_{i-1})^2},$$

oder wegen der zweiten der Gleichungen 21):

$$23) \quad \mathfrak{K}_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2}.$$

Nach 17) ist also

$$24) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i}{(Z_{i-1})^2}$$

oder

$$25)\quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2}.$$

Die Grössen Z_{i-1} und N_i können nach den aus der Theorie der Kettenbrüche bekannten Regeln immer leicht berechnet werden.

Setzen wir

$$26)\quad \frac{Z^i}{N'_i} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}_1} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_3} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_{i-2}}{\mathfrak{N}_{i-2}} + \frac{\mathfrak{M}_{i-1}}{\mathfrak{N}_{i-1}}$$

und zugleich

$$27)\quad Z'_1 = 0, \quad N'_1 = 1;$$

so ist nach einem bekannten Satze von den Kettenbrüchen:

$$28)\quad \begin{cases} Z'_1 = 0, \\ Z'_2 = \mathfrak{M}_1, \\ Z'_3 = Z'_2 \cdot \mathfrak{N}_2 + Z'_1 \cdot \mathfrak{M}_2, \\ Z'_4 = Z'_3 \cdot \mathfrak{N}_3 + Z'_2 \cdot \mathfrak{M}_3, \\ Z'_5 = Z'_4 \cdot \mathfrak{N}_4 + Z'_3 \cdot \mathfrak{M}_4, \end{cases}$$

u. s. w.

und

$$29)\quad \begin{cases} N'_1 = 1, \\ N'_2 = \mathfrak{N}_1, \\ N'_3 = N'_2 \cdot \mathfrak{N}_2 + N'_1 \cdot \mathfrak{M}_2, \\ N'_4 = N'_3 \cdot \mathfrak{N}_3 + N'_2 \cdot \mathfrak{M}_3, \\ N'_5 = N'_4 \cdot \mathfrak{N}_4 + N'_3 \cdot \mathfrak{M}_4, \end{cases}$$

u. s. w.

Aus den beiden Gleichungen 21) folgt aber:

$$30)\quad \begin{cases} Z_0 = 1, \\ Z_1 = \mathfrak{N}_1, \\ Z_2 = Z_1 \cdot \mathfrak{N}_2 + Z_0 \cdot \mathfrak{M}_2, \\ Z_3 = Z_2 \cdot \mathfrak{N}_3 + Z_1 \cdot \mathfrak{M}_3, \\ Z_4 = Z_3 \cdot \mathfrak{N}_4 + Z_2 \cdot \mathfrak{M}_4, \end{cases}$$

u. s. w.

Vergleicht man dies mit 29), so erhält man leicht nach und nach:

$$Z_0 = N'_1, \quad Z_1 = N'_2, \quad Z_2 = N'_3, \quad Z_3 = N'_4, \ldots;$$

also allgemein

$$Z_{i-1} = N'_i.$$

Verbindet man hiermit die zweite der Gleichungen 21), so ergiebt sich

$$31) \quad Z_{i-1} = N_i = N'_i,$$

und nach 24) und 25) ist also auch

$$32) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i}{(N'_i)^2}.$$

Bezeichnen wir die Anzahl der in dem Systeme vorkommenden Linsen durch l, so ist offenbar

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i = (-1)^l (M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i)^2,$$

und nach dem Vorhergehenden ist also

$$33) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i+l-1} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{Z_{i-1}} \right\}^2,$$

oder

$$34) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i+l-1} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{N_i} \right\}^2,$$

oder

$$35) \quad (p \quad F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i+l-1} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{N'_i} \right\}^2.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$36) \quad J_i = \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{Z_{i-1}}$$

$$= \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{N_i}$$

$$= \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{N'_i},$$

so ist

$$37) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i+l-1} (J_i)^2.$$

Ist nun $i + l - 1$ eine gerade Zahl, so ist

$$(p - F_i)(p_i - F'_i) = (J_i)^2,$$

und folglich, wovon man sich durch leichte Rechnung überzeugt:

$$38)\quad \frac{1}{p - F_i + J_i} + \frac{1}{p_i - F'_i + J_i} = \frac{1}{J_i}$$

oder

$$39)\quad \frac{1}{p - F_i - J_i} + \frac{1}{p_i - F'_i - J_i} = -\frac{1}{J_i};$$

also, wenn wir

$$40)\quad p - F_i + J_i = P_i, \quad p_i - F'_i + J_i = P'_i$$

und

$$41)\quad p - F_i - J_i = \Pi_i, \quad p_i - F'_i - J_i = \Pi'_i,$$

d. i.

$$42)\quad p = F_i - J_i + P_i, \quad p_i = F'_i - J_i + P'_i$$

und

$$43)\quad p = F_i + J_i + \Pi_i, \quad p_i = F'_i + J_i + \Pi'_i$$

setzen:

$$44)\quad \frac{1}{P_i} + \frac{1}{P'_i} = \frac{1}{J_i}$$

und

$$45)\quad \frac{1}{\Pi_i} + \frac{1}{\Pi'_i} = -\frac{1}{J_i}.$$

Ist ferner $i + l - 1$ eine ungerade Zahl, so ist

$$(p - F_i)(p_i - F'_i) = -(J_i)^2,$$

und folglich, wovon man sich ebenfalls durch leichte Rechnung überzeugt:

$$46)\quad \frac{1}{p - F_i + J_i} - \frac{1}{p_i - F'_i - J_i} = \frac{1}{J_i}$$

und

$$47)\quad \frac{1}{p - F_i - J_i} - \frac{1}{p_i - F'_i + J_i} = -\frac{1}{J_i},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$48)\quad \frac{1}{P_i} - \frac{1}{\Pi'_i} = \frac{1}{J_i}$$

und

$$49)\quad \frac{1}{\Pi_i} - \frac{1}{P'_i} = -\frac{1}{J_i}.$$

§. 22.

Nach III. 26) und III. 49) haben wir in den in §. 18. eingeführten Bezeichnungen die folgenden Gleichungen, in denen immer

im Falle eines Spiegels das obere, im Falle einer Linse das untere Zeichen zu nehmen ist:

$$\frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{p - f_1}{M_1} = \pm \frac{M_1}{p_1 - f'_1},$$

$$\frac{q'_1}{q_2} = \frac{r'}{r_2} = \frac{p'_1 - f_2}{M_2} = \pm \frac{M_2}{p_2 - f'_2},$$

$$\frac{q'_2}{q_3} = \frac{r'_2}{r_3} = \frac{p'_2 - f_3}{M_3} = \pm \frac{M_3}{p_3 - f'_3},$$

u. s. w.

$$\frac{q'_{i-1}}{q_i} = \frac{r'_{i-1}}{r_i} = \frac{p'_{i-1} - f_i}{M_i} = \pm \frac{M_i}{p_i - f'_i}.$$

Weil nun aber nach 4) bekanntlich

$$q_1 = q'_1, \quad q_2 = q'_2, \quad q_3 = q'_3, \ \ldots \ q_{i-1} = q'_{i-1};$$
$$r_1 = r'_1, \quad r_2 = r'_2, \quad r_3 = r'_3, \ \ldots \ r_{i-1} = r'_{i-1}$$

ist, so folgt aus diesen Gleichungen, wenn l wieder die Anzahl der in dem Systeme vorkommenden Linsen bezeichnet:

$$50) \quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i}$$

$$= \frac{(p - f_1)(p'_1 - f_2)(p'_2 - f_3) \ldots (p'_{i-1} - f_i)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}$$

und

$$51) \quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i}$$

$$= (-1)^l \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3) \ldots (p_i - f'_i)},$$

woraus ferner auch durch Multiplication

$$52) \quad \left(\frac{q}{q_i}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_i}\right)^2$$

$$= (-1)^l \cdot \frac{(p - f_1)(p'_1 - f_2)(p'_2 - f_3) \ldots (p'_{i-1} - f_i)}{(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3) \ldots (p_i - f'_i)}$$

folgt.

Nach 6) ist nun

$$p_1 - f'_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{p - f_1}.$$

Ferner ist nach 9)

$$p_2 - f'_2 = - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1} - \frac{\mathfrak{M}_1}{p - f_1},$$

d. i.

$$p_2 - f'_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{N}_1 (p - f_1)}{p - f_1}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2) = \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{N}_1 (p - f_1)}.$$

Auf ähnliche Art ist nach 9)

$$p_3 - f'_3 = - \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1} - \frac{\mathfrak{M}_1}{p_1 - f_1},$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$p_3 - f'_3 = - \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{N}_2 - (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)(p - f_1)},$$
$$\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{N}_1 (p - f_1)$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3)$$
$$= - \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{N}_2 - (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)(p - f_1)}.$$

Ebenso ist nach 9)

$$p_4 - f'_4 = - \frac{\mathfrak{M}_4}{\mathfrak{N}_3} + \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{N}_2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{N}_1} - \frac{\mathfrak{M}_1}{p - f_1},$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$p_4 - f'_4$$
$$= - \frac{\mathfrak{M}_4}{\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - (\mathfrak{M}_2 \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{M}_3 \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3)(p - f_1)}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{N}_2 - (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)(p - f_1)}},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3)(p_4 - f'_4)$$
$$= \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 - (\mathfrak{M}_2 \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{M}_3 \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3)(p - f_1)}.$$

Man könnte auf diese Art leicht noch weiter gehen. Es ergiebt sich aber schon auf unzweideutige Weise das Gesetz, dass sich das Product

$$(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3) \ldots (p_i - f'_i)$$

immer durch einen Ausdruck von der Form

$$(-1)^i \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i}{G_i - H_i(p - f_1)},$$

wo G_i und H_i bloss von

$$\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{M}_3, \quad \mathfrak{M}_4, \ldots \quad \mathfrak{M}_{i-1};$$
$$\mathfrak{N}_1, \quad \mathfrak{N}_2, \quad \mathfrak{N}_3, \quad \mathfrak{N}_4, \ldots \quad \mathfrak{N}_{i-1}$$

abhängende Grössen bezeichnen, darstellen lässt, und es wird jetzt zunächst darauf ankommen, die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes zu beweisen.

Zu dem Ende wollen wir untersuchen, ob dieses Gesetz unter der Voraussetzung, dass es bis $i - 1$ gültig sei, auch immer bis i gelten müsse. Der Annahme zufolge ist also

$$(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3) \ldots (p_{i-2} - f'_{i-2})$$
$$= (-1)^{i-2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_{i-2}}{G_{i-2} - H_{i-2}(p - f_1)}$$

und

$$(p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3) \ldots (p_{i-1} - f'_{i-1})$$
$$= (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_{i-1}}{G_{i-1} - H_{i-1}(p - f_1)},$$

folglich, wie sich hieraus durch Division ergiebt:

$$p_{i-1} - f'_{i-1} = -\mathfrak{M}_{i-1} \cdot \frac{G_{i-2} - H_{i-2}(p - f_1)}{G_{i-1} - H_{i-1}(p - f_1)}.$$

Nun ist aber nach 6)

$$p_i - f'_i = \frac{\mathfrak{M}_i}{p'_{i-1} - f_i},$$

und nach 4) und 7)

$$p'_{i-1} = p_{i-1} - E_{i-1} = p_{i-1} - \mathfrak{N}_{i-1} - f'_{i-1} + f_i,$$

also

$$p'_{i-1} - f_i = -(\mathfrak{N}_{i-1} - p_{i-1} + f'_{i-1}),$$

folglich

$$p_i - f'_i = -\frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{N}_{i-1} - p_{i-1} + f'_{i-1}}.$$

Führt man nun in diesen Ausdruck von $p_i - f'_i$ den vorhergehenden Ausdruck von $p_{i-1} - f'_{i-1}$ ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$p_i - f'_i$$
$$= -\mathfrak{M}_i \cdot \frac{G_{i-1} - H_{i-1}(p - f_1)}{G_{i-2}\mathfrak{M}_{i-1} + G_{i-1}\mathfrak{N}_{i-1} - (H_{i-2}\mathfrak{M}_{i-1} + H_{i-1}\mathfrak{N}_{i-1})(p - f_1)},$$

oder, wenn

$$53) \quad \begin{cases} G_i = G_{i-2}\mathfrak{M}_{i-1} + G_{i-1}\mathfrak{N}_{i-1}, \\ H_i = H_{i-2}\mathfrak{M}_{i-1} + H_{i-1}\mathfrak{N}_{i-1} \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$p_i - f'_i = -\mathfrak{M}_i \cdot \frac{G_{i-1} - H_{i-1}(p - f_1)}{G_i - H_i(p - f_1)}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$54) \quad (p_1 - f'_1)(p_2 - f'_2)(p_3 - f'_3) \ldots (p_i - f'_i)$$
$$= (-1)^i \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i}{G_i - H_i(p - f_1)},$$

und die Allgemeinheit des bemerkten Gesetzes ist folglich hierdurch offenbar bewiesen. Zugleich haben wir die in den Gleichungen 53) ausgesprochenen Gesetze der Abhängigkeit der Grössen

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3, \quad G_4, \ldots G_i$$

und

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3, \quad H_4, \ldots H_i$$

von einander entdeckt.

Aus den Gleichungen 51) und 54) ergiebt sich nun aber sogleich

$$\frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i}$$
$$= (-1)^{i-l} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i} \left\{ G_i - H_i(p - f_1) \right\},$$

und folglich, weil offenbar

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4 \ldots \mathfrak{M}_i = (-1)^l . (M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i)^2$$

ist:

$$55) \quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^i . \quad \frac{G_i - H_i (p - f_1)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i} .$$

Nach dem Vorhergehenden ist

$$\begin{aligned} G_1 &= 0, \\ G_2 &= \mathfrak{M}_1, \\ G_3 &= G_1 \mathfrak{M}_2 + G_2 \mathfrak{N}_2, \\ G_4 &= G_2 \mathfrak{M}_3 + G_3 \mathfrak{N}_3, \\ G_5 &= G_3 \mathfrak{M}_4 + G_4 \mathfrak{N}_4, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H_1 &= 1, \\ H_2 &= \mathfrak{N}_1, \\ H_3 &= H_1 \mathfrak{M}_2 + H_2 \mathfrak{N}_2, \\ H_4 &= H_2 \mathfrak{M}_3 + H_3 \mathfrak{N}_3, \\ H_5 &= H_3 \mathfrak{M}_4 + H_4 \mathfrak{N}_4, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen 28) und 29), indem man dieselben auf folgende Art darstellt:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 0, \\ Z_2 &= \mathfrak{M}_1, \\ Z_3 &= Z_1 \mathfrak{M}_2 + Z_2 \mathfrak{N}_2, \\ Z_4 &= Z_2 \mathfrak{M}_3 + Z_3 \mathfrak{N}_3, \\ Z_5 &= Z_3 \mathfrak{M}_4 + Z_4 \mathfrak{N}_4, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N'_1 &= 1, \\ N'_2 &= \mathfrak{N}_1, \\ N'_3 &= N'_1 \mathfrak{M}_2 + N'_2 \mathfrak{N}_2, \\ N'_4 &= N'_2 \mathfrak{M}_3 + N'_3 \mathfrak{N}_3, \\ N'_5 &= N'_3 \mathfrak{M}_4 + N'_4 \mathfrak{N}_4, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

so ergiebt sich auf der Stelle:

$$G_i = Z_i , \quad H_i = N'_i ;$$

und folglich nach 55):

$$56) \quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^i . \quad \frac{Z_i - N'_i (p - f_1)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i} .$$

Da nach 31)

$$N'_i = Z_{i-1} = N_i$$

ist, so kann man diese Formel auch auf folgende Art schreiben:

$$57)\quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^i . \quad \frac{Z'_i - Z_{i-1}(p - f_1)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i}$$

oder

$$58)\quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^i . \quad \frac{Z'_i - N_i (p - f_1)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i} .$$

Aus den Gleichungen 12) und 26) ergiebt sich aber

$$F_i - f_1 = \frac{Z'_i}{N'_i} ,$$

also

$$f_1 = F_i - \frac{Z'_i}{N'_i} , \quad p - f_1 = p - F_i + \frac{Z'_i}{N'_i} ;$$

folglich

$$Z'_i - N'_i (p - f_1) = - N'_i (p - F_i),$$

und daher nach 56):

$$59)\quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1} . \quad \frac{N'_i (p - F_i)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i} ,$$

oder nach dem Obigen

$$60)\quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1} . \quad \frac{Z_{i-1}(p - F_i)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i} ,$$

oder auch

$$61)\quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1} . \quad \frac{N_i (p - F_i)}{M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i} .$$

§. 23.

In §. 20. sind die folgenden Gleichungen bewiesen worden:

$$(p - F_{i-1})(p_{i-1} - F'_{i-1}) = \mathfrak{K}_{i-1},$$
$$(F_i - F_{i-1})(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i) = \mathfrak{K}_{i-1}$$

und

$$(p'_{i-1} - f_i)(p_i - f'_i) = \mathfrak{M}_i ,$$
$$(F'_i - f'_i)(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i) = - \mathfrak{M}_i .$$

Hieraus ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

$$(p - F_{i-1})(p_{i-1} - F'_{i-1})$$
$$= (F_i - F_{i-1})(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i)$$

und

$$(p'_{i-1} - f_i)(p_i - f'_i)$$
$$= -(F'_i - f'_i)(E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i),$$

oder die Proportionen

$$p - F_{i-1} : E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i$$
$$= F_i - F_{i-1} : p_{i-1} - F'_{i-1}$$

und

$$p_i - f'_i : E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i$$
$$= -(F'_i - f'_i) : p'_{i-1} - f_i,$$

aus denen sich nach einem bekannten Satze von den Proportionen die folgenden Proportionen ergeben:

$$p - F_{i-1} : E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i$$
$$= p - F_i : E_{i-1} - p_{i-1} + f_i$$

und

$$p_i - f'_i : E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i$$
$$= p_i - F'_i : E_{i-1} + p'_{i-1} - F'_{i-1}.$$

Weil nun aber nach 4)

$$E_{i-1} - p_{i-1} = -p'_{i-1}, \quad E_{i-1} + p'_{i-1} = p_{i-1}$$

ist, so werden die beiden vorhergehenden Proportionen:

$$p - F_{i-1} : E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i = p - F_i : -(p'_{i-1} - f_i),$$
$$p_i - f'_i : E_{i-1} - F'_{i-1} + f_i = p_i - F'_i : p_{i-1} - F'_{i-1};$$

und führen durch Division zu der Proportion:

$$\frac{p - F_{i-1}}{p_i - f'_i} : 1 = \frac{p - F_i}{p_i - F'_i} : -\frac{p'_{i-1} - f_i}{p_{i-1} - F'_{i-1}},$$

woraus sich die Gleichung

$$\frac{p - F_i}{p_i - F'_i} = -\frac{p - F_{i-1}}{p_{i-1} - F'_{i-1}} \cdot \frac{p'_{i-1} - f_i}{p_i - f'_i}$$

ergiebt.

Daher haben wir jetzt die folgenden Gleichungen:

$$\frac{p - F_i}{p_i - F'_i} = -\frac{p - F_{i-1}}{p_{i-1} - F'_{i-1}} \cdot \frac{p'_{i-1} - f_i}{p_i - f'_i},$$

$$\frac{p - F_{i-1}}{p_{i-1} - F'_{i-1}} = -\frac{p - F_{i-2}}{p_{i-2} - F'_{i-2}} \cdot \frac{p'_{i-2} - f_{i-1}}{p_{i-1} - f'_{i-1}},$$

$$\frac{p - F_{i-2}}{p_{i-2} - F'_{i-2}} = -\frac{p - F_{i-3}}{p_{i-3} - F'_{i-3}} \cdot \frac{p'_{i-3} - f_{i-2}}{p_{i-2} - f'_{i-2}},$$

u. s. w.

$$\frac{p-F_2}{p_2-F'_2}=-\frac{p-F_1}{p_1-F'_1}\cdot\frac{p'_1-f_2}{p_2-f'_2},$$

$$\frac{p-F_1}{p_1-F'_1}=\frac{p-f_1}{p_1-f'_1}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man:

$$\frac{p-F_i}{p_i-F'_i}$$
$$=(-1)^{i-1}\cdot\frac{(p-f_1)(p'_1-f_2)(p'_2-f_3)\dots(p'_{i-1}-f_i)}{(p_1-f'_1)(p_2-f'_2)(p_3-f'_3)\dots(p_i-f'_i)}.$$

Also ist nach 52)

$$62)\quad\left(\frac{q}{q_i}\right)^2=\left(\frac{r}{r_i}\right)^2=(-1)^{i-i+1}\cdot\frac{p-F_i}{p_i-F'_i},$$

oder

$$63)\quad\left(\frac{q}{q_i}\right)^2=\left(\frac{r}{r_i}\right)^2=(-1)^{i-i-1}\cdot\frac{p-F_i}{p_i-F'_i},$$

oder auch

$$64)\quad\left(\frac{q}{q_i}\right)^2=\left(\frac{r}{r_i}\right)^2=(-1)^{i+i-1}\cdot\frac{p-F_i}{p_i-F'_i}.$$

Fünftes Kapitel.

Von zwei eine gemeinschaftliche Axe habenden Spiegel- und Linsen-Systemen im Allgemeinen.

§. 24.

Zu dem im vorhergehenden Kapitel betrachteten Spiegel- und Linsen-Systeme als erstem Systeme, dessen erstes Element unmittelbar von den einfallenden Strahlen getroffen wird, wollen wir nun ein zweites System auf derselben Axe fügen, und werden für dieses System allen im vorigen Kapitel eingeführten Sym-

bolen, welche wir auch jetzt für das erste System unverändert beibehalten, oberhalb einen Accent beifügen.

Dies vorausgesetzt, ist nun zuvörderst nach IV. 34) für das erste System:

$$1)\quad (p-F_i)(p_i-F'_i)=(-1)^{i+i-1}\cdot\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}\right\}^2,$$

und eben so für das zweite System:

$$2)\quad (\dot{p}-\dot{F}_i)(\dot{p}_i-\dot{F}'_i)=(-1)^{i+i-1}\cdot\left\{\frac{\dot{M}_1 \dot{M}_2 \dot{M}_3 \ldots \dot{M}_i}{\dot{N}_i}\right\}^2;$$

also ist für das erste System:

$$3)\quad p_i=F'_i+\frac{(-1)^{i+i-1}}{p-F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}\right\}^2,$$

und für das zweite System:

$$4)\quad \dot{p}=\dot{F}_i+\frac{(-1)^{i+i-1}}{\dot{p}_i-\dot{F}'_i}\left\{\frac{\dot{M}_1 \dot{M}_2 \dot{M}_3 \ldots \dot{M}_i}{\dot{N}_i}\right\}^2.$$

Bezeichnen wir nun die von dem hintern Scheitel des letzten Elements des ersten Systems an gerechnete, gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des vordern Scheitels des ersten Elements des zweiten Systems, welcher bekanntlich der von den als einfallende Strahlen zu betrachtenden Strahlen unmittelbar getroffenen Kugelfläche entspricht, von dem hintern Scheitel des letzten Elements des ersten Systems durch $\mathfrak{E}$, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$\mathfrak{E}=p_i-\dot{p},$$

und folglich nach 3) und 4):

$$5)\quad \mathfrak{E}=F'_i-\dot{F}_i+\frac{(-1)^{i+i-1}}{p-F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}\right\}^2$$

$$-\frac{(-1)^{i+i-1}}{\dot{p}_i-\dot{F}'_i}\left\{\frac{\dot{M}_1 \dot{M}_2 \dot{M}_3 \ldots \dot{M}_i}{\dot{N}_i}\right\}^2$$

oder

$$6)\quad \mathfrak{E} - F'_i + \dot{F}'_i = \frac{(-1)^{i+i-1}}{p - F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}\right\}^2$$

$$- \frac{(-1)^{i+i-1}}{\dot{p}'_i - \dot{F}'_i}\left\{\frac{\dot{M}_1 \dot{M}_2 \dot{M}_3 \ldots \dot{M}'_i}{\dot{N}'_i}\right\}^2.$$

Für $\mathfrak{E} - F'_i + \dot{F}'_i = 0$, d. i.

für

$$\mathfrak{E} = F'_i - \dot{F}'_i$$

ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$7)\quad \frac{p - F_i}{\dot{p}'_i - \dot{F}'_i} = (-1)^{i+i-i-i} \cdot \left\{\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{\dot{M}_1 \dot{M}_2 \dot{M}_3 \ldots \dot{M}'_i} \cdot \frac{\dot{N}'_i}{N_i}\right\}^2$$

oder

$$8)\quad \frac{p - F_i}{\dot{p}'_i - \dot{F}'_i} = (-1)^{i+i-i-i} \cdot \left\{\frac{\dfrac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}}{\dfrac{\dot{M}_1 \dot{M}_2 \dot{M}_3 \ldots \dot{M}'_i}{\dot{N}'_i}}\right\}^2.$$

§. 25.

Ferner ist nach IV. 61) für das erste System:

$$9)\quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{N_i (p - F_i)}{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i},$$

und eben so für das zweite System:

$$10)\quad \frac{\dot{q}'}{\dot{q}'_i} = \frac{\dot{r}'}{\dot{r}'_i} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\dot{N}'_i (\dot{p}' - \dot{F}'_i)}{\dot{M}_1 \dot{M}_2 \dot{M}_3 \ldots \dot{M}'_i}.$$

Weil nun aber offenbar

$$q_i = \dot{q}' \text{ und } r_i = \dot{r}'$$

ist, so ist

$$11)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i}$$

$$= (-1)^{i+i'} \cdot \frac{N_i}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N'_i}{M'_1 M'_2 .. M'_i} (p - F_i)(p' - F'_i).$$

Es ist aber ferner

$$(p - F_i)(p' - F'_i) = \frac{p - F_i}{p'_i - F'_{i'}} \cdot (p' - F'_{i'})(p'_i - F'_{i'}),$$

und nach 6)

$$\frac{p - F_i}{p'_i - F'_i} = (-1)^{i+i-i'-i'} \cdot \left\{ \frac{M_1 M_2 .. M_i}{M'_1 M'_2 .. M'_i} \cdot \frac{N'_i}{N_i} \right\}^2$$

$$-(-1)^{i'+i-1} \cdot \left\{ \frac{N'_i}{M'_1 M'_2 .. M'_i} \right\}^2 \cdot (\mathfrak{E} - F'_i + F'_i)(p - F_i),$$

so wie nach 2)

$$(p' - F'_i)(p'_i - F'_{i'}) = (-1)^{i'+i'-1} \cdot \left\{ \frac{M'_1 M'_2 .. M'_i}{N'_i} \right\}^2;$$

also ist, wie man leicht findet, nach dem Vorhergehenden:

$$12)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 .. M_i}{M'_1 M'_2 .. M'_i} \cdot \frac{N'_i}{N_i}$$

$$- (-1)^{i+i} \cdot \frac{N_i}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N'_i}{M'_1 M'_2 .. M'_i} (\mathfrak{E} - F'_i + F'_i)(p - F_i)$$

oder

$$13)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i}$$

$$= (-1)^{i'+i-1} \cdot \frac{\dfrac{M_1 M_2 \ldots M_i}{N_i}}{\dfrac{M'_1 M'_2 \ldots M'_{i'}}{N'_{i'}}}$$

$$-(-1)^{i+i'} \cdot \frac{N_i}{M_1 M_2 \ldots M_i} \cdot \frac{N'_{i'}}{M'_1 M'_2 \ldots M'_{i'}} (\mathfrak{E} - F'_i + F'_{i'})(p - F_i).$$

Für $\mathfrak{E} = F'_i - F'_{i'}$ ist

$$14)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i} = (-1)^{i'+i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 \ldots M_i}{M'_1 M'_2 \ldots M'_{i'}} \cdot \frac{N'_{i'}}{N_i}$$

oder

$$15)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i} = (-1)^{i'+i-1} \cdot \frac{\dfrac{M_1 M_2 \ldots M_i}{N_i}}{\dfrac{M'_1 M'_2 \ldots M'_{i'}}{N'_{i'}}}.$$

Aus 7) und 14) folgt, dass unter derselben Voraussetzung wie vorher

$$16)\quad \left(\frac{q}{q'_i}\right)^2 = \left(\frac{r}{r'_i}\right)^2 = (-1)^{i+i-i'-i'} \cdot \frac{p - F_i}{p'_{i'} - F'_{i'}}$$

ist.

§. 26.

Bezeichnet $\mathfrak{D}$ die gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung eines gewissen Punktes in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme von dem hintern Scheitel des letzten Elements des zweiten Systems, so muss, wenn das letzte Bild $(p'_{i'} q'_{i'} r'_{i'})$ in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme eine bestimmte gehörig als positiv oder als negativ betrachtete

Entfernung Δ von dem durch die Grösse $\mathfrak{D}$ bestimmten Punkte in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme haben soll, nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$p'_i = \mathfrak{D} + \Delta,$$

und folglich nach 6)

$$\mathfrak{E} - F'_i + \acute{F}'_i = \frac{(-1)^{i+i-1}}{p - F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2$$

$$- \frac{(-1)^{i+i-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - \acute{F}'_i}\left\{\frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}'_i}{\acute{N}'_i}\right\},$$

also

$$17)\quad \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i + \frac{(-1)^{i+i-1}}{p - F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2$$

$$- \frac{(-1)^{i+i-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - \acute{F}'_i}\left\{\frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}'_i}{\acute{N}'_i}\right\}^2$$

sein.

Ist der absolute Werth von p so gross, dass man das Glied

$$\frac{(-1)^{i+i-1}}{p - F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so ist näherungsweise:

$$18)\quad \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i - \frac{(-1)^{i+i-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - \acute{F}'_i}\left\{\frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}'_i}{\acute{N}'_i}\right\}^2.$$

Ist der absolute Werth von Δ so gross, dass man das Glied

$$\frac{(-1)^{i+i-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - \acute{F}'_i}\left\{\frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}'_i}{\acute{N}'_i}\right\}^2$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so ist näherungsweise:

$$19)\quad \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i + \frac{(-1)^{i+i-1}}{p - F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2.$$

Sind die absoluten Werthe von p und Δ so gross, dass man die beiden Glieder

$$\frac{(-1)^{i+i-1}}{p-F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2$$

und

$$\frac{(-1)^{i'+i'-1}}{\mathfrak{D}+\Delta-F'_i}\left\{\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_i}{N'_i}\right\}^2$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so ist näherungsweise

$$20)\quad \mathfrak{E} = F'_i - F'_i.$$

Nach dem Obigen ist

$$(\mathfrak{E} - F'_i + F'_i)(p-F_i)$$

$$= (-1)^{i+i-1}\cdot\left\{\frac{M_1 M_2 .. M_i}{N_i}\right\}^2 - (-1)^{i+i'-1}\cdot\frac{p-F_i}{\mathfrak{D}+\Delta-F'_i}\left\{\frac{M'_1 M'_2 .. M'_i}{N'_i}\right\}^2.$$

Führt man diesen Ausdruck von

$$(\mathfrak{E}-F'_i+F'_i)(p-F_i)$$

in die Gleichung 12) ein, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen:

$$21)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i} = (-1)^{i+i-1}\cdot\frac{M'_1 M'_2 .. M'_i}{M_1 M_2 .. M_i}\cdot\frac{N_i}{N'_i}\cdot\frac{p-F_i}{\mathfrak{D}+\Delta-F'_i}$$

oder

$$22)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i} = (-1)^{i+i-1}\cdot\frac{\dfrac{M'_1 M'_2 .. M'_i}{N'_i}}{\dfrac{M_1 M_2 .. M_i}{N_i}}\cdot\frac{p-F_i}{\mathfrak{D}+\Delta-F'_i}$$

Setzen wir

$$23)\quad \begin{cases} q = p\ tang\, v, & q'_i = p'_i\ \ tang\, v'_i; \\ r = p\ tang\, w, & r'_i = p'_i\ tang\, w'_i; \end{cases}$$

oder

$$24)\quad \begin{cases} q = p\ tang\, v\,,\ \dot{q}'_i = (\mathfrak{D}+\Delta)\, tang\, \dot{v}'_i\,; \\ r = p\ tang\, w,\ \dot{r}'_i = (\mathfrak{D}+\Delta)\, tang\, \dot{w}'_i\,; \end{cases}$$

so ist

$$\frac{tang\, v}{tang\, \dot{v}'_i} = \frac{tang\, w}{tang\, \dot{w}'_i} = \frac{q}{\dot{q}'_i} \cdot \frac{\mathfrak{D}+\Delta}{p} = \frac{r}{\dot{r}'_i} \cdot \frac{\mathfrak{D}+\Delta}{p},$$

und folglich nach 21) und 22)

$$25)\quad \frac{tang\, v}{tang\, \dot{v}'_i} = \frac{tang\, w}{tang\, \dot{w}'_i}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{\dot{M}_1 \dot{M}_2 .. \dot{M}'_i}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{\dot{N}'_i} \cdot \frac{1 - \dfrac{F_i}{p}}{1 - \dfrac{\dot{F}'_i}{\mathfrak{D}+\Delta}}$$

oder

$$26)\quad \frac{tang\, v}{tang\, \dot{v}'_i} = \frac{tang\, w}{tang\, \dot{w}'_i}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{\dfrac{\dot{M}_1 \dot{M}_2 .. \dot{M}'_i}{\dot{N}'_i}}{\dfrac{M_1 M_2 .. M_i}{N_i}} \cdot \frac{1 - \dfrac{F_i}{p}}{1 - \dfrac{\dot{F}'_i}{\mathfrak{D}+\Delta}}.$$

Ist der absolute Werth von p so gross, dass sich der Bruch

$$\frac{F_i}{p}$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen lässt, so ist näherungsweise

$$27)\quad \frac{tang\, v}{tang\, \dot{v}'_i} = \frac{tang\, w}{tang\, \dot{w}'_i}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{\dot{M}_1 \dot{M}'_2 .. \dot{M}'_i}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{\dot{N}'_i} \cdot \frac{\mathfrak{D}+\Delta}{\mathfrak{D}+\Delta-\dot{F}'_i}$$

oder auch

$$28)\quad \frac{tang\ v}{tang\ v_i'} = \frac{tang\ w}{tang\ w_i'}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{\frac{M_1' M_2' .. M_i'}{N_i'}}{\frac{M_1 M_2 .. M_i}{N_i}} \cdot \frac{\mathfrak{D}+\Delta}{\mathfrak{D}+\Delta-F_i'} .$$

Ist der absolute Werth von Δ so gross, dass man den Bruch

$$\frac{F_i'}{\mathfrak{D}+\Delta}$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so ist näherungsweise

$$29)\quad \frac{tang\ v}{tang\ v_i'} = \frac{tang\ w}{tang\ w_i'}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1' M_2' .. M_i'}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{N_i'} \left(1 - \frac{F_i}{p}\right)$$

oder

$$30)\quad \frac{tang\ v}{tang\ v_i'} = \frac{tang\ w}{tang\ w_i'}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{\frac{M_1' M_2' .. M_i'}{N_i'}}{\frac{M_1 M_2 .. M_i}{N_i}} \left(1 - \frac{F_i}{p}\right).$$

Sind die absoluten Werthe von p und Δ so gross, dass man die Brüche

$$\frac{F_i}{p} \text{ und } \frac{F_i'}{\mathfrak{D}+\Delta}$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so ist näherungsweise

$$31)\quad \frac{tang\ v}{tang\ v'_i} = \frac{tang\ w}{tang\ w'_i} = (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M'_1 M'_2 .. M'_i}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i}$$

oder

$$32)\quad \frac{tang\ v}{tang\ v'_i} = \frac{tang\ w}{tang\ w'_i} = (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{\frac{M'_1 M'_2 .. M'_i}{N'_i}}{\frac{M_1 M_2 .. M_i}{N_i}} .$$

Kann man in diesem letzten Falle auch die Grössen

$$\frac{(-1)^{i+i-1}}{p - F_i} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i} \right\}^2$$

und

$$\frac{(-1)^{i'+i'-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - F'_i} \left\{ \frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_i}{N'_i} \right\}^2$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen, so ist nach 20) näherungsweise

$$\mathfrak{E} = F'_i - F'_i,$$

und folglich nach 14)

$$\frac{M'_1 M'_2 .. M'_i}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i} = (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{q'_i}{q} = (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{r'_i}{r} .$$

Also ist nach 31) näherungsweise:

$$\frac{tang\ v}{tang\ v'_i} = \frac{tang\ w}{tang\ w'_i}$$

$$= (-1)^{i+i+i'+i'} \cdot \frac{q'_i}{q} = (-1)^{i+i+i+i'} \cdot \frac{r'_i}{r} .$$

§. 27.

Wenn Strahlen, welche von einem leuchtenden Gegenstande, etwa von dem hellen Himmel, ausgehen, nach einem durch die Coordinaten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ bestimmten Punkte in der dem vordern Scheitel des ersten Elements des ersten Systems entsprechenden Kugelfläche convergiren, so wird für eine bestimmte Entfernung $\mathfrak{E}'$ des vordern Scheitels des ersten Elements des zweiten Systems von dem hintern Scheitel des letzten Elements des ersten Systems auch immer ein dem letzten Elemente des zweiten Systems entsprechendes Bild dieses Punktes ($\mathfrak{p}$ $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{r}$) entstehen, dessen auf gewöhnliche Weise genommene Coordinaten wir durch $\mathfrak{p}'_i$, $\mathfrak{q}'_i$, $\mathfrak{r}'_i$, das in Rede stehende Bild selbst also durch ($\mathfrak{p}'_i$ $\mathfrak{q}'_i$ $\mathfrak{r}'_i$) bezeichnen wollen, und nach 6) und 12) haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$34)\quad \mathfrak{E}' - F'_i + F'_i = \frac{(-1)^{i+i-1}}{\mathfrak{p} - F_i} \left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N}\right\}^2$$

$$- \frac{(-1)^{i+i-1}}{\mathfrak{p}'_i - F'_i} \left\{\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_i}{N'_i}\right\}^2$$

und

$$35)\quad \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'_i} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'_i}$$

$$= (-1)^{i+i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_i} \cdot \frac{N'_i}{N_i}$$

$$- (-1)^{i+i} \cdot \frac{N_i}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N'_i}{M'_1 M'_2 .. M'_i} (\mathfrak{E}' - F'_i + F'_i)(\mathfrak{p} - F_i).$$

Soll nun aber zu gleicher Zeit

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' \text{ und } \mathfrak{D} = \mathfrak{p}'_i$$

sein, so haben wir zur Bestimmung der Grössen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ nach 17) und 34) die beiden folgenden Gleichungen:

$$36)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = F'_i - F'_l + \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{p - F_i}\left\{\dfrac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2 \\ \qquad\qquad - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - F'_l}\left\{\dfrac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{N'_l}\right\}^2, \\ \mathfrak{E} = F'_i - F'_l + \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{\mathfrak{p} - F_i}\left\{\dfrac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2 \\ \qquad\qquad - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{\mathfrak{D} - F'_l}\left\{\dfrac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{N'_l}\right\}^2. \end{cases}$$

Durch Elimination der Grösse $\mathfrak{E}$ aus diesen beiden Gleichungen erhält man ohne Schwierigkeit zur Bestimmung der Grösse $\mathfrak{D}$ die folgende Gleichung:

$$37)\quad (\mathfrak{D} - F'_i)\left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_l}{\Delta}\right) = (-1)^{i+l-i-l} \cdot \frac{\left\{\dfrac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{M_1 M_2 M_3 .. M_i} \cdot \dfrac{N_i}{N'_l}\right\}^2}{\dfrac{1}{\mathfrak{p} - F_i}\quad\dfrac{1}{p - F_i}},$$

oder

$$38)\quad (\mathfrak{D} - F'_i)\left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_l}{\Delta}\right) = (-1)^{i+l-i-l} \cdot \frac{(p - F_i)(\mathfrak{p} - F_i)}{p - \mathfrak{p}}\left\{\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{M_1 M_2 M_3 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_l}\right\}^2$$

oder

$$39)\quad (\mathfrak{D} - F'_i)\left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_l}{\Delta}\right) = (-1)^{i+l-i-l} \cdot \frac{(p - F_i)(\mathfrak{p} - F_i)}{p - \mathfrak{p}} \cdot \left\{\frac{\dfrac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{N'_l}}{\dfrac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}}\right\}^2.$$

Hat man $\mathfrak{D}$ mittelst dieser Gleichung gefunden, so kann man $\mathfrak{E}$ mittelst einer der beiden Gleichungen 36), und das Verhältniss

$$\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'_i} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'_i}$$

mittelst der Gleichung 35), in welcher $\mathfrak{E}$ für $\mathfrak{E}'$ zu setzen ist, bestimmen.

Näherungsweise wird man immer $\mathfrak{p} = 0$ setzen können *), und hat dann zur Bestimmung von $\mathfrak{D}$ die Gleichung:

$$40)\quad (\mathfrak{D} - F'_i)\left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_i}{\Delta}\right) = -(-1)^{i+l-i-l'} F_i \left(1 - \frac{F_i}{p}\right) \left\{\frac{M'_1 M'_2 M'_3 \ldots M'_{l'}}{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_{l'}}\right\}^2$$

oder

$$41)\quad (\mathfrak{D} - F'_i)\left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_i}{\Delta}\right) = -(-1)^{i+l-i-l'} F_i \left(1 - \frac{F_i}{p}\right) \left\{\frac{\dfrac{M'_1 M'_2 M'_3 \ldots M'_{l'}}{N'_{l'}}}{\dfrac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}}\right\}^2;$$

und zur Bestimmung von $\mathfrak{E}$ die Gleichungen:

$$42)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = F'_i - F'_{l'} + \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{p - F_i} \left\{\dfrac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}\right\}^2 \\ \qquad\qquad - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - F'_{l'}} \left\{\dfrac{M'_1 M'_2 M'_3 \ldots M'_{l'}}{N'_{l'}}\right\}^2, \\ \mathfrak{E} = F'_i - F'_{l'} - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{F_i} \left\{\dfrac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}\right\}^2 \\ \qquad\qquad - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{\mathfrak{D} - F'_{l'}} \left\{\dfrac{M'_1 M'_2 M'_3 \ldots M'_{l'}}{N'_{l'}}\right\}^2; \end{cases}$$

*) Für den vordern Scheitel des ersten Elements des ersten Systems ist genau $\mathfrak{p} = 0$.

oder auch, wie man mit Hülfe von 40) leicht findet, die Gleichung:

$$43)\quad \mathfrak{E} = F'_i - F'_{i'}$$

$$+ (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{\frac{F_i}{p} + \frac{\mathfrak{D} - F'_{i'}}{\Delta}}{F_i\left(1 - \frac{F_i}{p}\right)} \left\{\frac{M_1\, M_2\, M_3 \,..\, M_i}{N_i}\right\}^2.$$

Zur Bestimmung von

$$\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'_{i'}} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'_{i'}}$$

hat man nach dem Obigen unter der Voraussetzung $\mathfrak{p} = 0$ die Gleichung:

$$44)\quad \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'_{i'}} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'_{i'}}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1\, M_2\, M_3 \,..\, M_i}{M'_1\, M'_2\, M'_3 \,..\, M'_{i'}} \cdot \frac{N'_{i'}}{N_i}$$

$$+ (-1)^{i+i'} \cdot \frac{N_i}{M_1\, M_2 \,..\, M_i} \cdot \frac{N'_{i'}}{M'_1\, M'_2 \,..\, M'_{i'}} F_i\,(\mathfrak{E} - F'_i + F'_{i'}).$$

Führt man aber in diese Gleichung den aus der zweiten der Gleichungen 42) sich ergebenden Werth von

$$F_i\,(\mathfrak{E} - F'_i + F'_{i'})$$

ein, so erhält man:

$$45)\quad \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'_{i'}} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'_{i'}}$$

$$= (-1)^{i+i'} \cdot \frac{M'_1\, M'_2\, M'_3 \,..\, M'_{i'}}{M_1\, M_2\, M_3 \,..\, M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_{i'}} \cdot \frac{F_i}{\mathfrak{D} - F'_{i'}}.$$

Ist der absolute Werth von p so gross, dass man den Bruch

$$\frac{F_i}{p}$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen oder als verschwindend betrachten kann, so ist nach 40):

$$46)\quad (\mathfrak{D} - \acute{F}'_i)\left(1 + \frac{\mathfrak{D} - \acute{F}'_i}{\Delta}\right)$$

$$= -(-1)^{i+l-i-l} F_i \left\{\frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}_i}{M_1 M_2 M_3 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{\acute{N}_i}\right\}^2,$$

und zur Bestimmung von $\mathfrak{E}$ hat man nach 42) die Gleichungen:

$$47)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - \acute{F}'_i} \left\{\dfrac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}_i}{\acute{N}_i}\right\}^2, \\ \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{F_i} \left\{\dfrac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2 \\ \qquad - \dfrac{(-1)^{i+l-1}}{\mathfrak{D} - \acute{F}'_i} \left\{\dfrac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}_i}{\acute{N}_i}\right\}^2; \end{cases}$$

oder nach 43) auch die Gleichung:

$$48)\quad \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i + (-1)^{i+l-1} \cdot \frac{\mathfrak{D} - \acute{F}'_i}{\Delta F_i} \left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2.$$

Die Gleichung 40) kann man auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$49)\quad \left(\frac{\mathfrak{D} - \acute{F}'_i}{\Delta}\right)^2 + \frac{\mathfrak{D} - \acute{F}'_i}{\Delta}$$

$$= -(-1)^{i+l-i-l} \frac{F_i}{\Delta}\left(1 - \frac{F_i}{p}\right) \left\{\frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 .. \acute{M}_i}{M_1 M_2 M_3 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{\acute{N}_i}\right\}^2.$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

$$50)\quad \mathfrak{D} = F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 \mp \sqrt{1-(-1)^{i+l-i-i}\cdot\frac{4F_i}{\Delta}\left(1-\frac{F_i}{p}\right)\left(\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{M_1 M_2 M_3 .. M_i}\cdot\frac{N_i}{N'_l}\right)^2}\right\},$$

und wenn man die Quadratwurzel nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}51)\quad \mathfrak{D} = F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta \pm \tfrac{1}{2}\Delta\Bigg\{ & 1-(\tfrac{1}{2})_1(-1)^{i+l-i-i}\cdot\frac{4F_i}{\Delta}\left(1-\frac{F_i}{p}\right)\left(\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{M_1 M_2 M_3 .. M_i}\cdot\frac{N_i}{N'_l}\right)^2 \\ & + (\tfrac{1}{2})_2\left(\frac{4F_i}{\Delta}\right)^2\left(1-\frac{F_i}{p}\right)^2\left(\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{M_1 M_2 M_3 .. M_i}\cdot\frac{N_i}{N'_l}\right)^4 \\ & - (\tfrac{1}{2})_3(-1)^{i+l-i-i}\cdot\left(\frac{4F_i}{\Delta}\right)^3\left(1-\frac{F_i}{p}\right)^3\left(\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{M_1 M_2 M_3 .. M_i}\cdot\frac{N_i}{N'_l}\right)^6 \\ & + (\tfrac{1}{2})_4\left(\frac{4F_i}{\Delta}\right)^4\left(1-\frac{F_i}{p}\right)^4\left(\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_l}{M_1 M_2 M_3 .. M_i}\cdot\frac{N_i}{N'_l}\right)^8 \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Bigg\}.\end{aligned}$$

Ist der absolute Werth von Δ sehr gross, so kann man näherungsweise

$$52)\quad \mathfrak{D} =$$

$$F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta \pm \left\{ \tfrac{1}{2}\Delta - (-1)^{i+l-i'-l'} \cdot F_i \left(1 - \frac{F_i}{p}\right) \left(\frac{M_1 M_2 .. M_{i'}}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i} \right)^2 \right\}$$

setzen; und kann man auch den Bruch

$$\frac{F_i}{p}$$

als verschwindend betrachten, so ist näherungsweise:

$$53)\quad \mathfrak{D} =$$

$$F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta \pm \left\{ \tfrac{1}{2}\Delta - (-1)^{i+l-i'-l'} \cdot F_i \left(\frac{M'_1 M'_2 .. M'_{i'}}{M_1 M_2 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i} \right)^2 \right\}.$$

Sind die absoluten Werthe von p und Δ sehr gross, so ist nach 42) oder 43) näherungsweise

$$\mathfrak{E} = F'_i - F'_i,$$

also nach 44) näherungsweise

$$54)\quad \frac{q}{q'_i} = \frac{r}{r'_i} = (-1)^{l+l'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_{i'}} \cdot \frac{N'_i}{N_i},$$

und folglich, weil in diesem Falle nach 31)

$$\frac{tang\ v}{tang\ v'_i} = \frac{tang\ w}{tang\ w'_i} = (-1)^{i+l'-1} \cdot \frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_{i'}}{M_1 M_2 M_3 .. M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i}$$

ist:

$$55)\quad \frac{tang\ v}{tang\ v'_i} = \frac{tang\ w}{tang\ w'_i}$$

$$= (-1)^{i+l+i'+l'} \cdot \frac{q'_i}{q} = (-1)^{i+l+i'+l'} \cdot \frac{r'_i}{r}.$$

§. 28.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der im Vorhergehenden durch $(p\,q\,r)$ bezeichnete Punkt in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme liege. Dann liegen auch alle Bilder des Punktes $(p\,q\,r)$ in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme, und es ist also in Folge der im Obigen gebrauchten Bezeichnung:

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_i = 0,$$
$$r = r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_i = 0$$

und

$$q'_1 = q'_2 = q'_3 = q'_4 = \ldots = q'_{i'} = 0,$$
$$r'_1 = r'_2 = r'_3 = r'_4 = \ldots = r'_{i'} = 0.$$

Nun wollen wir uns einen durch den Punkt $(p\,q\,r)$ in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme gehenden Strahl denken, welcher so nahe bei der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme auf das erste Element des ersten Systems fällt, dass die nach und nach bei den einzelnen Elementen der beiden Systeme abgelenkten Strahlen ohne merklichen Fehler als nach und nach durch die Punkte

$$(p_1\,q_1\,r_1),\ (p_2\,q_2\,r_2),\ (p_3\,q_3\,r_3),\ \ldots\ (p_i\,q_i\,r_i)$$

und

$$(p'_1\,q'_1\,r'_1),\ (p'_2\,q'_2\,r'_2),\ (p'_3\,q'_3\,r'_3),\ \ldots\ (p'_{i'}\,q'_{i'}\,r'_{i'})$$

in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme gehend betrachtet werden können, wobei bekanntlich der einfallende und alle abgelenkten Strahlen auch in einer und derselben durch die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme gehenden Ebene liegen, in welcher wir nun, was hier ein für alle Mal bemerkt wird, die ganze Construction, von der gleich weiter die Rede sein wird, uns ausgeführt denken wollen.

Durch den vordern Scheitel des 1sten Elements des ersten Systems errichten wir auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme ein Perpendikel, und nennen dessen Durchschnittspunkt mit dem auf das 1ste Element des ersten Systems fallenden Strahle Y_1. Durch den Punkt Y_1 und den Punkt $(p_1\,q_1\,r_1)$ ziehen wir eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 2ten Elements des ersten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme

errichteten Perpendikel durch Y_2. Eben so ziehen wir durch den Punkt Y_2 und den Punkt $(p_2\ q_2\ r_2)$ eine gerade Linie, und nennen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 3ten Elements des ersten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel Y_3. Auf diese Art weiter gehend ziehen wir endlich durch den Punkt Y_{i-1} und den Punkt $(p_{i-1}\ q_{i-1}\ r_{i-1})$ eine gerade Linie, und nennen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des $i$ten Elements des ersten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel Y_i. Hierauf ziehen wir durch den Punkt Y_i und den Punkt $(p_i\ q_i\ r_i)$ eine gerade Linie, und nennen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 1sten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel $\acute{Y}_1$. Durch den Punkt $\acute{Y}_1$ und den Punkt $(p'_1\ q'_1\ r'_1))$ ziehen wir eine gerade Linie, und nennen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 2ten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel $\acute{Y}_2$. Eben so ziehen wir durch den Punkt $\acute{Y}_2$ und den Punkt $(p'_2\ q'_2\ r'_2)$ eine gerade Linie, und nennen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 3ten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel $\acute{Y}_3$. Auf diese Art weiter gehend ziehen wir endlich durch den Punkt $\acute{Y}_{i-1}$ und den Punkt $(p'_{i-1}\ q'_{i-1}\ r'_{i-1})$ eine gerade Linie, und nennen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des $i$ten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel $\acute{Y}_i$.

Die, jenachdem sie auf der einen oder auf der andern Seite der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme liegen, gehörig als positiv und als negativ betrachteten Entfernungen der Punkte

$$Y_1,\quad Y_2,\quad Y_3,\quad Y_4,\ \ldots\ Y_i$$

und

$$\acute{Y}_1,\quad \acute{Y}_2,\quad \acute{Y}_3,\quad \acute{Y}_4,\ \ldots\ \acute{Y}_i$$

von der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme wollen wir respective durch

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad Q_4, \ldots Q_i$$

und

$$\acute{Q}_1, \quad \acute{Q}_2, \quad \acute{Q}_3, \quad \acute{Q}_4, \ldots \acute{Q}_{\acute{i}};$$

die von den vordern Scheiteln der Elemente an gerechneten, gehörig als positiv und negativ betrachteten Dicken der Elemente aber nach der Reihe durch

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad D_4, \ldots D_i$$

und

$$\acute{D}_1, \quad \acute{D}_2, \quad \acute{D}_3, \quad \acute{D}_4, \ldots \acute{D}_{\acute{i}}$$

bezeichnen.

Dies vorausgesetzt haben wir nun, wie leicht mittelst der ersten Elemente der analytischen Geometrie erhellet, die folgenden in völliger Allgemeinheit gültigen Proportionen:

$$\begin{aligned}
p_1 + D_1 : p_1 - E_1 &= Q_1 : Q_2, \\
p_2 + D_2 : p_2 - E_2 &= Q_2 : Q_3, \\
p_3 + D_3 : p_3 - E_3 &= Q_3 : Q_4, \\
&\text{u. s. w.} \\
p_{i-1} + D_{i-1} : p_{i-1} - E_{i-1} &= Q_{i-1} : Q_i, \\
p_i + D_i : p_i - \mathfrak{E} &= Q_i : \acute{Q}_1, \\
\acute{p}_1 + \acute{D}_1 : \acute{p}_1 - \acute{E}_1 &= \acute{Q}_1 : \acute{Q}_2, \\
\acute{p}_2 + \acute{D}_2 : \acute{p}_2 - \acute{E}_2 &= \acute{Q}_2 : \acute{Q}_3, \\
&\text{u. s. w.} \\
\acute{p}_{\acute{i}-1} + \acute{D}_{\acute{i}-1} : \acute{p}_{\acute{i}-1} - \acute{E}_{\acute{i}-1} &= \acute{Q}_{\acute{i}-1} : \acute{Q}_{\acute{i}}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Proportionen folgt:

$$56) \quad Q_2 = \frac{p_1 - E_1}{p_1 + D_1} Q_1,$$

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \frac{p_2 - E_2}{p_2 + D_2} Q_2, \\
&= \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)} Q_1,
\end{aligned}$$

$$Q_4 = \frac{p_3 - E_3}{p_3 + D_3} Q_3$$

$$= \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)(p_3 - E_3)}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)(p_3 + D_3)} Q_1,$$

u. s. w.

$$Q_i = \frac{p_{i-1} - E_{i-1}}{p_{i-1} + D_{i-1}} Q_{i-1}$$

$$= \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)(p_3 - E_3) \ldots (p_{i-1} - E_{i-1})}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)(p_3 + D_3) \ldots (p_{i-1} + D_{i-1})} Q_1,$$

$$Q_1' = \frac{p_i - \mathfrak{E}}{p_i + D_i} Q_i$$

$$= \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)(p_3 - E_3) \ldots (p_{i-1} - E_{i-1})}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)(p_3 + D_3) \ldots (p_{i-1} + D_{i-1})} \cdot \frac{p_i - \mathfrak{E}}{p_i + D_i} Q_1,$$

$$Q_2' = \frac{p_1' - E_1'}{p_1' + D_1'} Q_1'$$

$$= \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)(p_3 - E_3) \ldots (p_{i-1} - E_{i-1})}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)(p_3 + D_3) \ldots (p_{i-1} + D_{i-1})} \cdot \frac{p_i - \mathfrak{E}}{p_i + D_i}$$

$$\times \frac{p_1' - E_1'}{p_1' + D_1'} Q_1,$$

$$Q_3' = \frac{p_2' - E_2'}{p' + D_2'} Q_2'$$

$$= \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)(p_3 - E_3) \ldots (p_{i-1} - E_{i-1})}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)(p_3 + D_3) \ldots (p_{i-1} + D_{i-1})} \cdot \frac{p_i - \mathfrak{E}}{p_i + D_i}$$

$$\times \frac{(p_1' - E_1')(p_2' - E_2')}{(p_1' + D_1')(p_2' + D_2')} Q_1,$$

u. s. w.

$$\acute{Q}_i = \frac{\acute{p}_{i-1} - \acute{E}_{i-1}}{\acute{p}_{i-1} + \acute{D}_{i-1}} \acute{Q}_{i-1}$$

$$= \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)(p_3 - E_3)..(p_{i-1} - E_{i-1})}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)(p_3 + D_3)..(p_{i-1} + D_{i-1})} \cdot \frac{p_i - \mathfrak{E}}{p_i + D_i}$$

$$\times \frac{(\acute{p}_1 - \acute{E}_1)(\acute{p}_2 - \acute{E}_2)(\acute{p}_3 - \acute{E}_3)..(\acute{p}_{i-1} - \acute{E}_{i-1})}{(\acute{p}_1 + \acute{D}_1)(\acute{p}_2 + \acute{D}_2)(\acute{p}_3 + \acute{D}_3)..(\acute{p}_{i-1} + \acute{D}_{i-1})} Q_1 .$$

Zur Berechnung der Grössen

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad p_4, \ \ldots \ p_i$$

und

$$\acute{p}_1, \quad \acute{p}_2, \quad \acute{p}_3, \quad \acute{p}_4, \ \ldots \ \acute{p}_{i-1}$$

hat man nach IV. 25) die folgenden Gleichungen:

$$(p - F_1)(p_1 - F'_1) = \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2},$$

$$(p - F_2)(p_2 - F'_2) = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(N_2)^2},$$

$$(p - F_3)(p_3 - F'_3) = \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{(N_3)^2},$$

u. s. w.

$$(p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 .. \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2};$$

und

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_1)(\acute{p}_1 - \acute{F}'_1) = \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1}{(\acute{N}_1)^2},$$

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_2)(\acute{p}_2 - \acute{F}'_2) = -\frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2}{(\acute{N}_2)^2},$$

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_3)(\acute{p}_3 - \acute{F}'_3) = \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3}{(\acute{N}_3)^2},$$

u. s. w.

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_{i-1})(\acute{p}_{i-1} - \acute{F}'_{i-1}) = (-1)^{i-2} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3 \ldots \acute{M}_{i-1}}{(\acute{N}_{i-1})^2}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$57) \quad p_1 = F'_1 + \frac{1}{p - F_1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2},$$

$$p_2 = F'_2 - \frac{1}{p - F_2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(N_2)^2},$$

$$p_3 = F'_3 + \frac{1}{p - F_3} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{(N_3)^2},$$

u. s. w.

$$p_i = F'_i + \frac{(-1)^{i-1}}{p - F_i} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \ldots \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2};$$

$$\acute{p}_1 = \acute{F}'_1 + \frac{1}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_1} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1}{(\acute{N}_1)^2},$$

$$\acute{p}_2 = \acute{F}'_2 - \frac{1}{p - \mathfrak{E} - \acute{F}_2} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2}{(\acute{N}_2)^2},$$

$$\acute{p}_3 = \acute{F}'_3 + \frac{1}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_3} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3}{(\acute{N}_3)^2},$$

u. s. w.

$$\acute{p}_{i-1} = \acute{F}'_{i-1} + \frac{(-1)^{i-2}}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_{i-1}} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3 \ldots \acute{\mathfrak{M}}_{i-1}}{(\acute{N}_{i-1})^2}.$$

Ist der absolute Werth von p so gross, dass man alle die Factoren

$$\frac{1}{p - F_1}, \quad \frac{1}{p - F_2}, \quad \frac{1}{p - F_3}, \ldots \quad \frac{1}{p - F_i}$$

enthaltenden Glieder als verschwindend betrachten kann, so ist

58) $p_1 = F'_1,\ p_2 = F'_2,\ p_3 = F'_3,\ \ldots\ p_i = F'_i;$

$$p'_1 = F'_1 + \frac{1}{F'_i - F'_1 - \mathfrak{E}} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_1}{(N'_1)^2},$$

$$p'_2 = F'_2 + \frac{1}{F'_i - F'_2 - \mathfrak{E}} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_1\,\mathfrak{M}'_2}{(N'_2)^2},$$

$$p'_3 = F'_3 + \frac{1}{F'_i - F'_3 - \mathfrak{E}} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_1\,\mathfrak{M}'_2\,\mathfrak{M}'_3}{(N'_3)^2},$$

u. s. w.

$$p'_{i-1} = F'_{i-1} + \frac{(-1)^{i-2}}{F'_i - F'_{i-1} - \mathfrak{E}} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_1\,\mathfrak{M}'_2\,\mathfrak{M}'_3 \ldots \mathfrak{M}'_{i-1}}{(N'_{i-1})^2}.$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist also nach dem Obigen:

59) $$Q_i = \frac{(F'_1 - E_1)(F'_2 - E_2)(F'_3 - E_3)\ldots(F'_{i-1} - E_{i-1})}{(F'_1 + D_1)(F'_2 + D_2)(F'_3 + D_3)\ldots(F'_{i-1} + D_{i-1})}\, Q_1$$

oder

60) $$Q_i = \frac{\left(1 - \frac{E_1}{F'_1}\right)\left(1 - \frac{E_2}{F'_2}\right)\left(1 - \frac{E_3}{F'_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}}\right)}{\left(1 + \frac{D_1}{F'_1}\right)\left(1 + \frac{D_2}{F'_2}\right)\left(1 + \frac{D_3}{F'_3}\right)\ldots\left(1 + \frac{D_{i-1}}{F'_{i-1}}\right)}\, Q_1.$$

Kann man die Brüche

$$\frac{D_1}{F'_1},\ \frac{D_2}{F'_2},\ \frac{D_3}{F'_3},\ \ldots\ \frac{D_{i-1}}{F'_{i-1}}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist

61) $$Q_i = \left(1 - \frac{E_1}{F'_1}\right)\left(1 - \frac{E_2}{F'_2}\right)\left(1 - \frac{E_3}{F'_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}}\right) Q_1.$$

§. 29.

Ferner wollen wir jetzt einen Strahl betrachten, welcher, durch den Punkt $(p\ q\ r)$ gehend, das 1ste Element des ersten

Systems in seinem vordern Scheitel trifft, und nach und nach an allen Elementen der beiden Systeme Ablenkungen erleidet, wobei dieser Strahl wieder unter solchen Bedingungen auf das 1ste Element des ersten Systems fallen soll, dass sich ohne merklichen Fehler annehmen lässt, dass die abgelenkten Strahlen nach und nach durch die sämmtlich in der durch den Punkt $(p\,q\,r)$ und die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme gelegten Ebene, in welcher wir, was hier ein für alle Mal bemerkt wird, die folgenden Constructionen ausführen werden, liegenden Bilder

$$(p_1\,q_1\,r_1),\quad (p_2\,q_2\,r_2),\quad (p_3\,q_3\,r_3),\quad \ldots\ (p_i\,q_i\,r_i)$$

und

$$(p'_1\,q'_1\,r'_1),\quad (p'_2\,q'_2\,r'_2),\quad (p'_3\,q'_3\,r'_3),\quad \ldots\ (p'_i\,q'_i\,r'_i)$$

gehen.

Dies vorausgesetzt ziehen wir nun durch den vordern Scheitel des 1sten Elements des ersten Systems und den Punkt $(p_1\,q_1\,r_1)$ eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 2ten Elements des ersten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel durch $\mathfrak{Y}_2$. Durch den Punkt $\mathfrak{Y}_2$ und den Punkt $(p_2\,q_2\,r_2)$ ziehen wir wieder eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 3ten Elements des ersten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel durch $\mathfrak{Y}_3$. Auf diese Art weiter gehend ziehen wir endlich durch den Punkt $\mathfrak{Y}_{i-1}$ und den Punkt $(p_{i-1}\,q_{i-1}\,r_{i-1})$ eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des $i$ten Elements des ersten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel durch $\mathfrak{Y}_i$. Hierauf ziehen wir durch den Punkt $\mathfrak{Y}_i$ und den Punkt $(p_i\,q_i\,r_i)$ eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 1sten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel durch $\mathfrak{Y}'_1$. Durch den Punkt $\mathfrak{Y}'_1$ und den Punkt $(p'_1\,q'_1\,r'_1)$ ziehen wir eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 2ten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel durch $\mathfrak{Y}'_2$. Eben so

ziehen wir durch den Punkt $\mathfrak{Y}_2$ und den Punkt $(p'_2\, q'_2\, r'_2)$ eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des 3ten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel durch $\mathfrak{Y}'_3$. Endlich ziehen wir, auf diese Art weiter gehend, durch den Punkt $\mathfrak{Y}_{i-1}$ und den Punkt $(p'_{i-1}\, q'_{i-1}\, r'_{i-1})$ eine gerade Linie, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit dem durch den vordern Scheitel des i'ten Elements des zweiten Systems auf die gemeinschaftliche Axe der beiden Systeme errichteten Perpendikel durch $\mathfrak{Y}'_i$.

Die, jenachdem sie auf der einen oder auf der andern Seite der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme liegen, gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen der Punkte

$$\mathfrak{Y}_2,\ \mathfrak{Y}_3,\ \mathfrak{Y}_4,\ \mathfrak{Y}_5,\ \ldots\ \mathfrak{Y}_i$$

und

$$\mathfrak{Y}'_1,\ \mathfrak{Y}'_2,\ \mathfrak{Y}'_3,\ \mathfrak{Y}'_4,\ \ldots\ \mathfrak{Y}'_i$$

von der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme wollen wir respective durch

$$\mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{D}_3,\ \mathfrak{D}_4,\ \mathfrak{D}_5,\ \ldots\ \mathfrak{D}_i$$

und

$$\mathfrak{D}'_1,\ \mathfrak{D}'_2,\ \mathfrak{D}'_3,\ \mathfrak{D}'_4,\ \ldots\ \mathfrak{D}'_i$$

bezeichnen.

Die auf dieselbe Weise ebenfalls gehörig als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen der Punkte

$$(p_1\, q_1\, r_1),\ (p_2\, q_2\, r_2),\ (p_3\, q_3\, r_3),\ \ldots\ (p_i\, q_i\, r_i)$$

und

$$(p'_1\, q'_1\, r'_1),\ (p'_2\, q'_2\, r'_2),\ (p'_3\, q'_3\, r'_3),\ \ldots\ (p'_i\, q'_i\, r'_i)$$

von der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme sollen respective durch

$$\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \mathfrak{q}_3,\ \mathfrak{q}_4,\ \ldots\ \mathfrak{q}_i$$

und

$$\mathfrak{q}'_1,\ \mathfrak{q}'_2,\ \mathfrak{q}'_3,\ \mathfrak{q}'_4,\ \ldots\ \mathfrak{q}'_i;$$

und die gleichfalls gehörig als positiv oder negativ betrachteten,

von den vordern Scheiteln der Elemente an gerechneten Dicken derselben ganz auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Paragraphen bezeichnet werden.

Dies vorausgesetzt liefern uns nun die bekanntesten Grundformeln der analytischen Geometrie aus der Theorie der geraden Linie in der Ebene sehr leicht zur successiven Bestimmung der Grössen

$$\mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{D}_3,\ \mathfrak{D}_4,\ \mathfrak{D}_5,\ \ldots\ \mathfrak{D}_i$$

und

$$\acute{\mathfrak{D}}_1,\ \acute{\mathfrak{D}}_2,\ \acute{\mathfrak{D}}_3,\ \acute{\mathfrak{D}}_4,\ \ldots\ \acute{\mathfrak{D}}_i$$

die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{D_1' + E_1}{D_1 + p_1}\, q_1,$$

$$\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{D}_2 = \frac{D_2 + E_2}{D_2 + p_2}\,(q_2 - \mathfrak{D}_2),$$

$$\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{D}_3 = \frac{D_3 + E_3}{D_3 + p_3}\,(q_3 - \mathfrak{D}_3),$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i - \mathfrak{D}_{i-1} = \frac{D_{i-1} + E_{i-1}}{D_{i-1} + p_{i-1}}\,(q_{i-1} - \mathfrak{D}_{i-1}).$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_1 - \mathfrak{D}_i = \frac{D_i + \mathfrak{E}}{D_i + p_i}\,(q_i - \mathfrak{D}_i),$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_2 - \acute{\mathfrak{D}}_1 = \frac{D_1' + E_1}{D_1' + p_1'}\,(q_1' - \acute{\mathfrak{D}}_1),$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_3 - \acute{\mathfrak{D}}_2 = \frac{D_2' + E_2}{D_2' + p_2'}\,(q_2' - \acute{\mathfrak{D}}_2),$$

u. s. w.

$$\acute{\mathfrak{D}}_i - \acute{\mathfrak{D}}_{i-1} = \frac{D_{i-1}' + E_{i-1}}{D_{i-1}' + p_{i-1}'}\,(q_i'^{-1} - \acute{\mathfrak{D}}_{i-1}).$$

Bekanntlich ist nun nach IV. 25*)*:

$$(p - F_1)(p_1 - F'_1) = \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2},$$

$$(p - F_2)(p_2 - F'_2) = -\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(N_2)^2},$$

$$(p - F_3)(p_3 - F'_3) = \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{(N_3)^2},$$

u. s. w.

$$(p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 .. \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2}$$

und

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_1)(p'_1 - \acute{F}'_1) = \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1}{(\acute{N}_1)^2},$$

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_2)(p'_2 - \acute{F}'_2) = -\frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2}{(\acute{N}_2)^2},$$

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_3)(p'_3 - \acute{F}'_3) = \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3}{(\acute{N}_3)^2},$$

u. s. w.

$$(p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_{i-1})(p'_{i-1} - \acute{F}'_{i-1}) = (-1)^{i-2} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3 .. \acute{\mathfrak{M}}_{i-1}}{(\acute{N}_{i-1})^2};$$

und nach IV. 61) ist:

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N_1}{M_1}(p - F_1),$$

$$\frac{q}{q_2} = -\frac{N_2}{M_1 M_2}(p - F_2),$$

$$\frac{q}{q_3} = \frac{N_3}{M_1 M_2 M_3}(p - F_3),$$

u. s. w.

$$\frac{q}{q_i} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{N_i}{M_1 M_2 M_3 .. M_i}(p - F_i)$$

und

$$\frac{q_i}{q'_1} = \frac{N'_1}{M'_1}(p_i - \mathfrak{E} - F'_1),$$

$$\frac{q_i}{q'_2} = -\frac{N'_2}{M'_1 M'_2}(p_i - \mathfrak{E} - F'_2),$$

$$\frac{q_i}{q'_3} = \frac{N'_3}{M'_1 M'_2 M'_3}(p_i - \mathfrak{E} - F'_3),$$

u. s. w.

$$\frac{q_i}{q'_{i-1}} = (-1)^{i-2} \cdot \frac{N'_{i-1}}{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_{i-1}}(p_i - \mathfrak{E} - F'_{i-1}).$$

Aus allen diesen Gleichungen erhält man nun ohne Schwierigkeit die folgenden Gleichungen:

$$62) \quad \mathfrak{D}_2 = \frac{D_1 + E_1}{D_1 + F'_1 + \frac{1}{p - F_1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2}} \cdot \frac{M_1}{N_1} \cdot \frac{q}{p - F_1},$$

$$\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{D}_2 = -\frac{D_2 + E_2}{D_2 + F'_2 - \frac{1}{p - F_2} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(N_2)^2}} \left\{ \frac{M_1 M_2}{N_2} \cdot \frac{q}{p - F_2} + \mathfrak{D}_2 \right\},$$

$$\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{D}_3 = \frac{D_3 + E_3}{D_3 + F'_3 + \frac{1}{p - F_3} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{(N_3)^2}} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3}{N_3} \cdot \frac{q}{p - F_3} - \mathfrak{D}_3 \right\},$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i - \mathfrak{D}_{i-1} = \frac{D_{i-1} + E_{i-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1} + \frac{(-1)^{i-2}}{p - F_{i-1}} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 .. \mathfrak{M}_{i-1}}{(N_{i-1})^2}} \left\{ (-1)^{i-2} \cdot \frac{M_1 .. M_{i-1}}{N_{i-1}} \cdot \frac{q}{p - F_{i-1}} - \mathfrak{D}_{i-1} \right\},$$

$$\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_i = \frac{D_i + \mathfrak{E}}{D_i + F'_i + \frac{(-1)^{i-1}}{p - F_i} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 .. \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2}} \left\{ (-1)^{i-1} \cdot \frac{M_1 .. M_i}{N_i} \cdot \frac{q}{p - F_i} - \mathfrak{D}_i \right\};$$

$$p_i = F'_i + \frac{(-1)^{i-1}}{p - F_i} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 .. \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2},$$

$$q_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i} \cdot \frac{q}{p - F_i};$$

$$\dot{\mathfrak{D}}_2-\dot{\mathfrak{D}}_1=\frac{\dot{D}_1+\dot{E}_1}{\dot{D}_1+\dot{F}'_1+\frac{1}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_1}\cdot\frac{\dot{\mathfrak{M}}_1}{(\dot{N}_1)^2}}\left\{\frac{\dot{M}_1}{\dot{N}_1}\cdot\frac{\mathfrak{q}_i}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_1}-\dot{\mathfrak{D}}_1\right\},$$

$$\dot{\mathfrak{D}}_3-\dot{\mathfrak{D}}_2=-\frac{\dot{D}_2+\dot{E}_2}{\dot{D}_1+\dot{F}'_2-\frac{1}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_2}\cdot\frac{\dot{\mathfrak{M}}_1\dot{\mathfrak{M}}_2}{(\dot{N}_2)^2}}\left\{\frac{\dot{M}_1\dot{M}_2}{\dot{N}_2}\cdot\frac{\mathfrak{q}_i}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_2}+\dot{\mathfrak{D}}_2\right\},$$

$$\dot{\mathfrak{D}}_4-\dot{\mathfrak{D}}_3=\frac{\dot{D}_3+\dot{E}_3}{\dot{D}_3+\dot{F}'_3+\frac{1}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_3}\cdot\frac{\dot{\mathfrak{M}}_1\dot{\mathfrak{M}}_2\dot{\mathfrak{M}}_3}{(\dot{N}_3)^2}}\left\{\frac{\dot{M}_1\dot{M}_2\dot{M}_3}{\dot{N}_3}\cdot\frac{\mathfrak{q}_i}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_3}-\dot{\mathfrak{D}}_3\right\},$$

u. s. w.

$$\dot{\mathfrak{D}}_i-\dot{\mathfrak{D}}_{i-1}=$$

$$\frac{\dot{D}_{i-1}+\dot{E}_{i-1}}{\dot{D}_{i-1}+\dot{F}'_{i-1}+\frac{(-1)^{i-2}}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_{i-1}}\cdot\frac{\dot{\mathfrak{M}}_1..\dot{\mathfrak{M}}_{i-1}}{(\dot{N}_{i-1})^2}}\left\{(-1)^{i-2}\frac{\dot{M}_1..M_{i-1}}{\dot{N}_{i-1}}\cdot\frac{\mathfrak{q}_i}{p_i-\mathfrak{E}-\dot{F}_{i-1}}-\dot{\mathfrak{D}}_{i-1}\right\}.$$

Setzen wir

$$63)\quad \frac{q}{p}=tang\,\varphi,$$

so werden die vorhergehenden Gleichungen:

$$64)\quad \mathfrak{D}_2=\frac{D_1+E_1}{D_1+F'_1+\frac{1}{p-F_1}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2}}\cdot\frac{M_1}{N_1}\cdot\frac{tang\,\varphi}{1-\frac{F_1}{p}},$$

$$\mathfrak{D}_3-\mathfrak{D}_2=-\frac{D_2+E_2}{D_2+F'_2-\frac{1}{p-F_2}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{(N_2)^2}}\left\{\frac{M_1M_2}{N_2}\cdot\frac{tang\,\varphi}{1-\frac{F_2}{p}}+\mathfrak{D}_2\right\},$$

$$\mathfrak{D}_4-\mathfrak{D}_3=\frac{D_3+E_3}{D_3+F'_3+\frac{1}{p-F_3}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3}{(N_3)^2}}\left\{\frac{M_1M_2M_3}{N_3}\cdot\frac{tang\,\varphi}{1-\frac{F_3}{p}}-\mathfrak{D}_3\right\},$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i - \mathfrak{D}_{i-1} =$$

$$\frac{D_{i-1} + E_{i-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1} + \frac{(-1)^{i-2}}{p - F_{i-1}} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 .. \mathfrak{M}_{i-1}}{(N_{i-1})^2}} \left\{ (-1)^{i-2} \cdot \frac{M_1 .. M_{i-1}}{N_{i-1}} \cdot \frac{tang\, \varphi}{1 - \frac{F_{i-1}}{p}} - \mathfrak{D}_{i-1} \right\},$$

$$\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_i = \frac{D_i + \mathfrak{E}}{D_i + F'_i + \frac{(-1)^{i-1}}{p - F_i} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 .. \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2}} \left\{ (-1)^{i-1} \cdot \frac{M_1 .. M_i}{(N_i)^2} \cdot \frac{tang\, \varphi}{1 - \frac{F_i}{p}} - \mathfrak{D}_i \right\};$$

$$p_i = F'_i + \frac{(-1)^{i-1}}{p - F_i} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 .. \mathfrak{M}_i}{(N_i)^2},$$

$$q_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i} \cdot \frac{tang\, \varphi}{1 - \frac{F_i}{p}};$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_2 - \acute{\mathfrak{D}}_1 = \frac{\acute{D}_1 + \acute{E}_1}{\acute{D}_1 + \acute{F}'_1 + \frac{1}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_1} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1}{(\acute{N}_1)^2}} \left\{ \frac{\acute{M}_1}{\acute{N}_1} \cdot \frac{q_i}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_1} - \acute{\mathfrak{D}}_1 \right\},$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_3 - \acute{\mathfrak{D}}_2 = - \frac{\acute{D}_2 + \acute{E}_2}{\acute{D}_2 + \acute{F}'_2 - \frac{1}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_2} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2}{(\acute{N}_2)^2}} \left\{ \frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2}{\acute{N}_2} \cdot \frac{q_i}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_2} + \acute{\mathfrak{D}}_2 \right\},$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_4 - \acute{\mathfrak{D}}_3 = \frac{\acute{D}_3 + \acute{E}_3}{\acute{D}_3 + \acute{F}'_3 + \frac{1}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_3} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3}{(\acute{N}_3)^2}} \left\{ \frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3}{\acute{N}_3} \cdot \frac{q_i}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}_3} - \mathfrak{D}_3 \right\},$$

u. s. w.

$$\acute{\mathfrak{D}}_i' - \acute{\mathfrak{D}}_{i-1}' =$$

$$\frac{\acute{D}'_{i-1} + \acute{E}'_{i-1}}{\acute{D}'_{i-1} + \acute{F}'_{i-1} + \frac{(-1)^{i-2}}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}'_{i-1}} \cdot \frac{\acute{\mathfrak{M}}_1 .. \acute{\mathfrak{M}}'_{i-1}}{(\acute{N}'_{i-1})^2}} \left\{ (-1)^{i-2} \cdot \frac{\acute{M}_1 .. \acute{M}'_{i-1}}{\acute{N}'_{i-1}} \cdot \frac{q_i}{p_i - \mathfrak{E} - \acute{F}'_{i-1}} - \acute{\mathfrak{D}}'_{i-1} \right\}.$$

Wenn der absolute Werth von p so gross ist, dass man alle

p im Nenner enthaltenden Glieder ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten kann, so ist

$$65)\quad \mathfrak{D}_2 = \frac{D_1 + E_1}{D_1 + F'_1} \cdot \frac{M_1}{N_1} \, tang\, \varphi,$$

$$\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{D}_2 = -\frac{D_2 + E_2}{D_2 + F'_2} \left\{ \frac{M_1 M_2}{N_2} \, tang\, \varphi + \mathfrak{D}_2 \right\},$$

$$\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{D}_3 = \frac{D_3 + E_3}{D_3 + F'_3} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3}{N_3} \, tang\, \varphi - \mathfrak{D}_3 \right\},$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i - \mathfrak{D}_{i-1} = \frac{D_{i-1} + E_{i-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1}} \left\{ (-1)^{i-2} \cdot \frac{M_1 M_2 .. M_{i-1}}{N_{i-1}} \, tang\, \varphi - \mathfrak{D}_{i-1} \right\}$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_1 - \mathfrak{D}_i = \frac{D_i + \mathfrak{E}}{D_i + F'_i} \left\{ (-1)^{i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 .. M_i}{N_i} \, tang\, \varphi - \mathfrak{D}_i \right\};$$

$$q_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i} \, tang\, \varphi;$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_2 - \acute{\mathfrak{D}}_1 = \frac{D'_1 + \acute{E}_1}{\acute{D}_1 + \acute{F}'_1 + \dfrac{1}{F'_i - \acute{F}_1 - \mathfrak{E}} \cdot \dfrac{\acute{\mathfrak{M}}_1}{(\acute{N}_1)^2}} \left\{ \frac{\acute{M}_1}{\acute{N}_1} \cdot \frac{q_i}{F'_i - \acute{F}_1 - \mathfrak{E}} - \acute{\mathfrak{D}}_1 \right\},$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_3 - \acute{\mathfrak{D}}_2 = -\frac{\acute{D}_2 + \acute{E}_2}{\acute{D}_2 + \acute{F}'_2 - \dfrac{1}{F'_i - \acute{F}_2 - \mathfrak{E}} \cdot \dfrac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2}{(\acute{N}_2)^2}} \left\{ \frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2}{\acute{N}_2} \cdot \frac{q_i}{F'_i - \acute{F}_2 - \mathfrak{E}} + \acute{\mathfrak{D}}_2 \right\},$$

$$\acute{\mathfrak{D}}_4 - \acute{\mathfrak{D}}_3 = \frac{\acute{D}_3 + \acute{E}_3}{\acute{D}_3 + \acute{F}'_3 + \dfrac{1}{F'_i - \acute{F}_3 - \mathfrak{E}} \cdot \dfrac{\acute{\mathfrak{M}}_1 \acute{\mathfrak{M}}_2 \acute{\mathfrak{M}}_3}{(\acute{N}_3)^2}} \left\{ \frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3}{\acute{N}_3} \cdot \frac{q_i}{F'_i - \acute{F}_3 - \mathfrak{E}} - \acute{\mathfrak{D}}_3 \right\},$$

u. s. w.

$$\acute{\mathfrak{D}}_i - \acute{\mathfrak{D}}_{i-1} =$$

$$\frac{\acute{D}_{i-1} + \acute{E}_{i-1}}{\acute{D}_{i-1} + \acute{F}'_{i-1} + \dfrac{(-1)^{i-2}}{F'_i - \acute{F}_{i-1} - \mathfrak{E}} \cdot \dfrac{\acute{\mathfrak{M}}_1 .. \acute{\mathfrak{M}}_{i-1}}{(\acute{N}_{i-1})^2}} \left\{ (-1)^{i-2} \cdot \frac{\acute{M}_1 .. \acute{M}_{i-1}}{\acute{N}_{i-1}} \cdot \frac{q_i}{F'_i - \acute{F}_{i-1} - \mathfrak{E}} - \acute{\mathfrak{D}}_{i-1} \right\}.$$

Unter derselben Voraussetzung wie vorher ist also für das erste System für sich:

$$66)\quad \mathfrak{D}_2 = \frac{D_1 + E_1}{D_1 + F'_1} \cdot \frac{M_1}{N_1} \, tang\, \varphi,$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{F'_2 - E_2}{D_2 + F'_2} \mathfrak{D}_2 - \frac{D_2 + E_2}{D_2 + F'_2} \cdot \frac{M_1 M_2}{N_2} \, tang\, \varphi,$$

$$\mathfrak{D}_4 = \frac{F'_3 - E_3}{D_3 + F'_3} \mathfrak{D}_3 + \frac{D_3 + E_3}{D_3 + F'_3} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3}{N_3} \, tang\, \varphi,$$

$$\mathfrak{D}_5 = \frac{F'_4 - E_4}{D_4 + F'_4} \mathfrak{D}_4 - \frac{D_4 + E_4}{D_4 + F'_4} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 M_4}{N_4} \, tang\, \varphi,$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i = \frac{F'_{i-1} - E_{i-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1}} \mathfrak{D}_{i-1} + (-1)^{i-2} \cdot \frac{D_{i-1} + E_{i-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1}} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_{i-1}}{N_{i-1}} \, tang\, \varphi;$$

oder auch

$$67)\quad \mathfrak{D}_2 = \frac{\frac{E_1}{F'_1} + \frac{D_1}{F'_1}}{1 + \frac{D_1}{F'_1}} \cdot \frac{M_1}{N_1} \, tang\, \varphi,$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{1 - \frac{E_2}{F'_2}}{1 + \frac{D_2}{F'_2}} \mathfrak{D}_2 - \frac{\frac{E_2}{F'_2} + \frac{D_2}{F'_2}}{1 + \frac{D_2}{F'_2}} \cdot \frac{M_1 M_2}{N_2} \, tang\, \varphi,$$

$$\mathfrak{D}_4 = \frac{1 - \frac{E_3}{F'_3}}{1 + \frac{D_3}{F'_3}} \mathfrak{D}_3 + \frac{\frac{E_3}{F'_3} + \frac{D_3}{F'_3}}{1 + \frac{D_3}{F'_3}} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3}{N_3} \, tang\, \varphi,$$

$$\mathfrak{D}_5 = \frac{1 - \frac{E_4}{F'_4}}{1 + \frac{D_4}{F'_4}} \mathfrak{D}_4 - \frac{\frac{E_4}{F'_4} + \frac{D_4}{F'_4}}{1 + \frac{D_4}{F'_4}} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 M_4}{N_4} \, tang\, \varphi,$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i = \frac{1 - \frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}}}{1 + \frac{D_{i-1}}{F'_{i-1}}} \mathfrak{D}_{i-1} + (-1)^{i-2} \cdot \frac{\frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}} + \frac{D_{i-1}}{F''_{i-1}}}{1 + \frac{D_{i-1}}{F'_{i-1}}} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_{i-1}}{N_{i-1}} \; tang\, \varphi .$$

Kann man die Brüche

$$\frac{D_1}{F'_1}, \quad \frac{D_2}{F'_2}, \quad \frac{D_3}{F'_3}, \quad \frac{D_4}{F'_4}, \cdots \frac{D_{i-1}}{F'_{i-1}}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist:

$$68) \quad \mathfrak{D}_2 = \frac{E_1}{F'_1} \cdot \frac{M_1}{N_1} \; tang\, \varphi ,$$

$$\mathfrak{D}_3 = \left(1 - \frac{E_2}{F'_2}\right) \mathfrak{D}_2 - \frac{E_2}{F'_2} \cdot \frac{M_1 M_2}{N_2} \; tang\, \varphi ,$$

$$\mathfrak{D}_4 = \left(1 - \frac{E_3}{F'_3}\right) \mathfrak{D}_3 + \frac{E_3}{F'_3} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3}{N_3} \; tang\, \varphi ,$$

$$\mathfrak{D}_5 = \left(1 - \frac{E_4}{F'_4}\right) \mathfrak{D}_4 - \frac{E_4}{F'_4} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 M_4}{N_4} \; tang\, \varphi ,$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i = \left(1 - \frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}}\right) \mathfrak{D}_{i-1} + (-1)^{i-2} \cdot \frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_{i-1}}{N_{i-1}} \; tang\, \varphi .$$

Da bei wirklichen Anwendungen aller dieser Formeln φ immer der Null sehr nahe kommt, so kann man in denselben auch näherungsweise φ für $tang\, \varphi$ setzen. Uebrigens würde man auch leicht $\mathfrak{D}_i$ auf ganz indepentente Weise ausdrücken können, was wir jedoch, als nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegend, und weil die obigen recurrirenden Formeln das obwaltende Gesetz auf eine sehr deutliche Weise darstellen, hier der Kürze wegen unterlassen.

§. 30.

Im Allgemeinen bemerken wir am Schluss dieses Kapitels noch, dass im Vorhergehenden ganz absichtlich alle Formeln, um sie in möglichst entwickelter Form darzustellen und ihre Bildungsgesetze möglichst in die Augen fallend zu machen, unmittelbar durch die Moduli der einzelnen Elemente ausgedrückt worden sind. Auf der Stelle ist aber aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass die

entwickelten Formeln eigentlich nur oder wenigstens vorzugsweise von den beiden Grössen

$$69) \quad J_i = \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 \dots M_i}{N_i}$$

und

$$70) \quad \acute{J}_i = \frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 \acute{M}_4 \dots \acute{M}_i}{\acute{N}_i}$$

abhängen, durch welche man auch leicht die Formeln ausdrücken und unter einer noch mehr vereinfachten Form darstellen könnte, was wir aber der Kürze wegen, und weil die Sache nicht die geringste Schwierigkeit hat, unterlassen und lediglich dem Leser selbst anheim stellen. Was aber die Grössen J_i und $\acute{J}_i$, von denen die eine dem ersten, die andere dem zweiten Systeme entspricht, betrifft, so ist nicht unbemerkt zu lassen, dass dieselben nach IV. 34) respective mit den Grössen p, p_i, F_i, F'_i und p', p'_i, $\acute{F}_i$, $\acute{F}'_i$ auf folgende Art:

$$71) \quad (p - F_i)(p_i - F'_i) = (-1)^{i+i-1}(J_i)^2$$

und

$$72) \quad (p' - \acute{F}_i)(p'_i - \acute{F}'_i) = (-1)^{i+i-1}(\acute{J}_i)^2;$$

und nach IV. 61) respective mit den Grössen p, q, q_i, r, r_i, F_i und p', q', q'_i, r', r'_i, $\acute{F}_i$ auf folgende Art:

$$73) \quad \frac{q}{q_i} = \frac{r}{r_i} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{p - F_i}{J_i}$$

und

$$74) \quad \frac{q'}{q'_i} = \frac{r'}{r'_i} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{p' - \acute{F}_i}{\acute{J}_i};$$

zusammenhängen. Diese auch auf das folgende Kapitel Anwendung findenden Bemerkungen sind späterer Untersuchungen wegen in mehrfacher Rücksicht von Wichtigkeit.

Sechstes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope.

§. 31.

Jedes Fernrohr *) und Mikroskop **) besteht aus zwei eine gemeinschaftliche Axe habenden, auf schickliche Weise mit einander verbundenen Spiegel- und Linsen-Systemen, von denen das eine das Objectiv-System, das andere das Ocular-System genannt wird. Das Objectiv-System ist dasjenige der beiden Systeme, welchem jederzeit eine solche Lage gegeben wird, dass sein erstes Element von möglichst vielen von einem entweder mit eigenem oder mit von einem selbst leuchtenden Körper entlehntem Lichte leuchtenden Objecte ausgehenden Lichtstrahlen so vollkommen als möglich getroffen werden kann, oder diese Lichtstrahlen so vollkommen als möglich aufzunehmen im Stande ist. Das Ocular-System dagegen ist dasjenige der beiden Systeme, hinter dessen letztes Element in einer bestimmten Entfernung von demselben das Auge des Beobachters gehalten wird, um die von dem Objecte ausgehenden Lichtstrahlen, nachdem sie an sämmtlichen Elementen der beiden Systeme Zurückwerfungen oder Brechungen erlitten haben, aufzunehmen, so dass nämlich das Auge unmittelbar von den von dem letzten Elemente des Ocular-Systems ausgehenden Strahlen getroffen wird.

Für das Objectiv-System wollen wir im Folgenden ganz dieselben Bezeichnungen beibehalten, welche wir im vorhergehenden Kapitel für das erste System gebraucht haben, und eben so sollen im Folgenden für das Ocular-System ganz dieselben Bezeichnungen beibehalten werden, welche im vorhergehenden Kapitel für

---

*) Ich begreife unter diesem Namen auch die sogenannten Spiegel-Teleskope.

**) Die sogenannten einfachen Mikroskope sollte man lieber bloss Loupen nennen.

das zweite System gebraucht worden sind, wobei sich von selbst versteht, dass wir auch jetzt unsern Betrachtungen ganz dieselben Coordinaten-Systeme wie im vorhergehenden Kapitel zum Grunde legen.

Das Auge des Beobachters nehmen wir immer in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme an, und bezeichnen durch $\mathfrak{D}$ seine gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung von dem hintern Scheitel des letzten Elements des Ocular-Systems.

Aus der physikalischen Theorie des Auges und des Sehens müssen wir hier als bekannt voraussetzen, dass jedes Auge die Gegenstände nur dann mit der vollkommensten Schärfe und Deutlichkeit erblickt, wenn sich dieselben in einer bestimmten Entfernung von ihm befinden, welche für jedes Auge eine bestimmte Grösse hat und die Weite des deutlichen Sehens genannt wird. Die in Bezug auf den durch die Entfernung $\mathfrak{D}$ von dem hintern Scheitel des letzten Elements des Ocular-Systems bestimmten Ort des Auges als Anfang genommene und natürlich mit Rücksicht auf die zum Grunde gelegten Coordinatensysteme gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Weite des deutlichen Sehens soll im Folgenden durch Δ bezeichnet werden.

§. 32.

Der erste Zweck nun, mit dem und durch den die Erreichung aller übrigen Zwecke unmittelbar zusammenhängt und wesentlich bedingt wird, welchen man mit einem jeden Fernrohre und Mikroskope zu erreichen beabsichtigt, ist der, dass sich das dem letzten Elemente des Ocular-Systems entsprechende Bild eines Objects, von welchem Strahlen auf das erste Element des Objectiv-Systems fallen, in der Weite des deutlichen Sehens von dem Auge des Beobachters und in einer solchen Lage gegen dasselbe befindet, dass die von dem letzten Elemente des Ocular-Systems ausgehenden und das Auge des Beobachters treffenden Strahlen als von dem, dem letzten Elemente des Ocular-Systems entsprechenden Bilde des Objects ausgehend betrachtet werden können.

Dieser Zweck eines jeden Fernrohrs und Mikroskops erfordert offenbar, dass, wenn die Richtung der positiven ersten Coordinaten der Richtung von dem vordern Scheitel des ersten Ele-

ments des Objectiv-Systems an nach dem hintern Scheitel des letzten Elements des Ocular-Systems hin entspricht, die Grössen $\mathfrak{D}$ und Δ respective positiv und negativ sein müssen; entspricht dagegen die Richtung der positiven ersten Coordinaten der entgegengesetzten Richtung, so müssen natürlich auch $\mathfrak{D}$ und Δ entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. diese beiden Grössen müssen respective negativ und positiv sein.

Soll nun der in Rede stehende Zweck ferner vollständig erreicht werden, so muss, wenn $\mathfrak{E}$ wie gewöhnlich die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des vordern Scheitels des ersten Elements des Ocular-Systems von dem hintern Scheitel des letzten Elements des Objectiv-Systems bezeichnet, nach V. 17) die Bedingungsgleichung

$$1)\quad \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i + \frac{(-1)^{i+i-1}}{p - F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i}\right\}^2$$

$$- \frac{(-1)^{i+i-1}}{\mathfrak{D} + \Delta - \acute{F}'_i}\left\{\frac{\acute{M}_1 \acute{M}_2 \acute{M}_3 \ldots \acute{M}_i}{\acute{N}_i}\right\}^2$$

erfüllt sein, was auf doppelte Weise geschehen kann.

Entweder nimmt man nämlich von den beiden Grössen p und $\mathfrak{E}$ neben allen übrigen in der vorstehenden Gleichung vorkommenden Grössen auch die Grösse p als gegeben oder constant an, und bestimmt die Grösse $\mathfrak{E}$, in Bezug auf welche die obige Gleichung vom ersten Grade ist, so, dass dieser Gleichung genügt wird; oder man nimmt von den beiden Grössen p und $\mathfrak{E}$ neben allen übrigen in der obigen Gleichung vorkommenden Grössen auch die Grösse $\mathfrak{E}$ als gegeben oder constant an, und bestimmt die Grösse p, in Bezug auf welche diese Gleichung ebenfalls vom ersten Grade ist, so, dass derselben genügt wird.

Bei dem Gebrauche des Fernrohrs, mit welchem man immer sehr weit entfernte Gegenstände mit möglichster Deutlichkeit zu erkennen beabsichtigt, hat man es nicht in seiner Gewalt, die Grösse p willkührlich zu verändern, und kann daher bloss die erste der beiden vorhergehenden Verfahrungsarten in Anwendung bringen, weshalb bei jedem Fernrohre die Röhren, in denen das Objectiv-System und das Ocular-System eingeschlossen sind, sich in einander verschieben lassen, so dass dem Ocular-Systemen

die erforderliche Entfernung von dem Objectiv-Systeme gegeben werden kann.

Bei dem Gebrauche des Mikroskops, mittelst welches man immer sehr kleine Gegenstände, die man in jede beliebige Entfernung von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems bringen kann, mit möglichster Deutlichkeit zu erblicken beabsichtigt, liesse sich sowohl die erste, als auch die zweite der beiden obigen Verfahrungsarten anwenden. Vorzugsweise wird aber gegenwärtig das zweite Verfahren angewandt, und daher die Einrichtung so getroffen, dass entweder die Röhre, in welcher das Objectiv-System und das Ocular-System eingeschlossen sind, auf eine bequeme Weise in verschiedene Ertfernungen von dem das Object tragenden Objectivtischgen, oder dass umgekehrt das letztere in verschiedene Entfernungen von der festen das Objectiv-System und Ocular-System enthaltenden Röhre gebracht werden kann.

Der vorhergehende Unterschied zwischen dem Fernrohre und Mikroskope, welche sonst beide im Wesentlichen ganz ein und denselben gemeinschaftlichen Zweck haben, schien mir zu verdienen, besonders hervorgehoben zu werden.

In dem Falle des Fernrohrs bietet aber der Umstand, dass bei dem Gebrauche desselben der absolute Werth von p immer sehr gross ist, die Vereinfachung der Bedingungsgleichung 1) dar, dass man in derselben das Glied

$$\frac{(-1)^{i+i'-1}}{p-F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen, und daher nach 1) näherungsweise

$$2)\quad \mathfrak{E} = F'_i - F'_i - \frac{(-1)^{i+i'-1}}{\mathfrak{D}+\Delta-F'_i}\left\{\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_i}{N'_i}\right\}^2$$

setzen kann. Wäre in diesem Falle für ein sehr weitsichtiges Auge nun auch noch der absolute Werth von Δ so gross, dass man ohne merklichen Fehler auch noch das Glied

$$\frac{(-1)^{i+i'-1}}{\mathfrak{D}+\Delta-F'_i}\left\{\frac{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_i}{N'_i}\right\}^2$$

zu vernachlässigen sich berechtigt halten dürfte, so würde man nach 2) die sehr einfache, natürlich auch nur näherungsweise richtige Gleichung

$$3) \quad \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i$$

zur Bestimmung von $\mathfrak{E}$ erhalten.

Bei dem Mikroskope hat man, wenn für ein sehr weitsichtiges Auge der absolute Werth von Δ so gross ist, dass man das Glied

$$\frac{(-1)^{i+i'-1}}{\mathfrak{D}+\Delta-\acute{F}'_i}\left\{\frac{\acute{M}_1\acute{M}_2\acute{M}_3..\acute{M}_i}{\acute{N}_i}\right\}^2$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, zur Bestimmung von p nach 1) die näherungsweise richtige Gleichung

$$4) \quad \mathfrak{E} = F'_i - \acute{F}'_i + \frac{(-1)^{i+i'-1}}{p-F_i}\left\{\frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{N_i}\right\}^2.$$

Vor dem Gebrauche des Fernrohrs und Mikroskops muss man vor allen Dingen immer zuerst die Bedingungsgleichung 1) erfüllen, und dies geschieht in der Praxis jederzeit am Einfachsten und Genauesten eben dadurch, dass man bei'm Fernrohre durch geeignete Verschiebungen der das Ocular-System enthaltenden Röhre die Entfernung des Ocular-Systems und des Objectiv-Systems von einander so lange nach und nach verändert, bis man das Object, welches man durch das Fernrohr betrachten will, mit der grössten Deutlichkeit und Schärfe erblickt; bei dem Mikroskope verändert man durch die angebrachten desfallsigen mechanischen Hülfsmittel die Entfernung der das Objectiv-System und das Ocular-System enthaltenden Röhre und des zu betrachtenden Objects von einander so lange, bis das letztere dem Auge mit der grössten Deutlichkeit und Schärfe sich darstellt. Weil alle unsere folgenden Betrachtungen über das Fernrohr und Mikroskop voraussetzen, dass die Gleichung 1) so genau als irgend möglich erfüllt sei, so sieht man, dass die an diesen Instrumenten immer angebrachten mechanischen Hülfsmittel zu der feinen Verstellung des Ocular-Systems gegen das Objectiv-System oder dieser beiden Systeme und des Objects gegen einander keineswegs etwa als bloss untergeordnete Theile der genannten Instrumente be-

trachtet werden dürfen, sondern dass vielmehr die Künstler sich jederzeit sehr angelegen sein lassen sollten, dieselben mit der grössten Feinheit und Genauigkeit auszuführen, was leider nicht immer so vollkommen geschieht, wie es dem Vorhergehenden zufolge die Theorie fordert. Auch muss man, wenn einmal durch die Genauigkeit der Einstellung ein völlig deutliches und scharfes Erscheinen des Objects bewirkt worden ist, bei dem ferneren Gebrauche des Instruments sich angelegen sein lassen, das Auge immer wieder möglichst genau in dieselbe Lage zu bringen, wovon die Nothwendigkeit, wenn die fernere Theorie richtig sein soll, aus dem Obigen ganz von selbst hervorgeht.

Im Folgenden werden wir immer voraussetzen, dass durch eine vorhergegangene scharfe Einstellung die Bedingungsgleichung 1) erfüllt worden sei, was allen unseren ferneren Betrachtungen zum Grunde liegt.

§. 33.

Unter den im vorhergehenden Paragraphen gemachten Voraussetzungen ist nun nach V. 21)

$$5)\quad \frac{q'_i}{q} = \frac{r'_i}{r} = (-1)^{i+i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M'_1 M'_2 M'_3 .. M'_i} \cdot \frac{N'_i}{N_i} \cdot \frac{\mathfrak{D} + \Delta - F'_i}{p - F_i}.$$

Bezeichnet man die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des hintern Scheitels des letzten Elements des Ocular-Systems von dem vordern Scheitel des ersten Elements des Objectiv-Systems durch $\mathfrak{L}$, so ist, wie leicht aus der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten folgt, $p - \mathfrak{D} - \mathfrak{L}$ die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des Objects vom Auge. Dagegen ist bekanntlich Δ die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des letzten Bildes vom Auge.

Setzen wir nun, indem wir die Winkel V, V'_i und W, W'_i zwar positiv und negativ, aber ihren absoluten Werthen nach nicht grösser als 90° nehmen, was offenbar verstattet ist:

$$6)\quad \begin{cases} q = (p - \mathfrak{D} - \mathfrak{L}) \, tang \, V, \quad q'_i = \Delta \, tang \, V'_i; \\ r = (p - \mathfrak{D} - \mathfrak{L}) \, tang \, W, \quad r'_i = \Delta \, tang \, W'_i; \end{cases}$$

so ist

$$7)\quad \frac{tang\,V'_i}{tang\,V} = \frac{tang\,W'_i}{tang\,W}$$

$$= \frac{q'_i}{q} \cdot \frac{p - \mathfrak{D} - \mathfrak{L}}{\Delta} = \frac{r'_i}{r} \cdot \frac{p - \mathfrak{D} - \mathfrak{L}}{\Delta},$$

und folglich nach 5):

$$8)\quad \frac{tang\,V'_i}{tang\,V} = \frac{tang\,W'_i}{tang\,W}$$

$$= (-1)^{i+i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{M'_1 M'_2 M'_3 \ldots M'_i} \cdot \frac{N'_i}{N_i} \cdot \frac{p - \mathfrak{D} - \mathfrak{L}}{p - F_i} \cdot \frac{\Delta + \mathfrak{D} - F'_i}{\Delta}$$

oder

$$9)\quad \frac{tang\,V'_i}{tang\,V} = \frac{tang\,W'_i}{tang\,W}$$

$$= (-1)^{i+i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{M'_1 M'_2 M'_3 \ldots M'_i} \cdot \frac{N'_i}{N_i} \cdot \frac{1 - \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{L}}{p}}{1 - \frac{F_i}{p}} \left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_i}{\Delta}\right).$$

Ist es verstattet, näherungsweise

$$tang\,V = V, \quad tang\,V'_i = V'_i$$

und

$$tang\,W = W, \quad tang\,W'_i = W'_i$$

zu setzen, so ist näherungsweise

$$10)\quad \frac{V'_i}{V} = \frac{W'_i}{W}$$

$$= (-1)^{i+i-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{M'_1 M'_2 M'_3 \ldots M'_i} \cdot \frac{N'_i}{N_i} \cdot \frac{1 - \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{L}}{p}}{1 - \frac{F_i}{p}} \left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_i}{\Delta}\right).$$

Bei Fernröhren wird man meistens die Brüche

$$\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{L}}{p} \text{ und } \frac{F_i}{p}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten können, und erhält dann näherungsweise:

$$11) \quad \frac{tang\, V_i'}{tang\, V} = \frac{tang\, W_i'}{tang\, W}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M_1' M_2' M_3' .. M_i'} \cdot \frac{N_i'}{N_i} \left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F''_i}{\Delta}\right)$$

oder

$$12) \quad \frac{V_i'}{V} = \frac{W_i'}{W}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M_1' M_2' M_3' .. M_i'} \cdot \frac{N_i'}{N_i} \left(1 + \frac{\mathfrak{D} - F''_i}{\Delta}\right).$$

Kann man dann für ein sehr weitsichtiges Auge noch den Bruch

$$\frac{\mathfrak{D} - F''_i}{\Delta}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist

$$13) \quad \frac{tang\, V_i'}{tang\, V} = \frac{tang\, W_i'}{tang\, W}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M_1' M_2' M_3' .. M_i'} \cdot \frac{N_i'}{N_i}$$

oder

$$14) \quad \frac{V_i'}{V} = \frac{W_i'}{W}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M_1' M_2' M_3' .. M_i'} \cdot \frac{N_i'}{N_i}.$$

Im Falle des Mikroskops ist für ein sehr weitsichtiges Auge nach dem Obigen näherungsweise:

$$15)\quad \frac{tang\, V_i'}{tang\, V} = \frac{tang\, W_i'}{tang\, W}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M_1' M_2' M_3' .. M_i'} \cdot \frac{N_i'}{N_i} \cdot \frac{p - \mathfrak{D} - L}{p - F_i}$$

oder

$$16)\quad \frac{V_i'}{V} = \frac{W_i'}{W}$$

$$= (-1)^{i+i'-1} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 .. M_i}{M_1' M_2' M_3' .. M_i'} \cdot \frac{N_i'}{N_i} \cdot \frac{p - \mathfrak{D} - L}{p - F_i} .$$

Wollen wir über die Grösse von Objecten aus der blossen Beschauuung derselben mit dem Auge ein Urtheil fällen, so sind eigentlich die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden.

Wenn wir uns zwei Objecte denken, von deren wirklichen Grössen und Entfernungen von dem Auge wir gar keine bestimmte Vorstellung haben, und wenn wir auch alle Mittel entbehren, durch welche wir uns dieselbe verschaffen könnten, so beurtheilen wir die verhältnissmässige Grösse derselben bloss nach den Sehwinkeln, unter welchen sie uns erscheinen.

Wenn aber die vorhergehende Voraussetzung nicht Statt findet, wenn wir vielmehr von den wirklichen Grössen der Objecte und deren Entfernungen von dem Auge gewisse bestimmte Vorstellungen haben, so mischen sich diese Vorstellungen in unser Urtheil über die verhältnissmässige Grösse der Objecte unwillkürlich ein, letzteres wird durch die ersteren wesentlich modificirt und bedingt, und hängt nun nicht mehr bloss von der Grösse der Sehwinkel ab, unter denen uns die Objecte erscheinen, indem ja ein Jeder aus der alltäglichsten Erfahrung weiss, dass z. B. eine Länge von vier Zollen in einer Entfernung von fünf Fussen vom Auge demselben, keineswegs doppelt so gross erscheint als in einer Entfernung von zehn Fussen, obgleich im ersten Falle der Sehwinkel allerdings sehr nahe doppelt so gross ist als im letztern Falle. Wollen wir daher unter der obigen Voraussetzung die Grössen, in denen die Objecte uns erscheinen, auf eine möglichst

sichere Weise mit einander vergleichen, so werden wir dieselben, wie leicht erhellen wird, den Sehwinkeln proportional zu setzen haben, unter denen diese Objecte erscheinen würden, wenn wir sie uns in gleichen Entfernungen vom Auge, etwa in der Weite des deutlichen Sehens von demselben dächten. Wenigstens scheint sich bei diesem Gegenstande, welcher mit der noch sehr in Dunkel gehüllten Art und Weise, wie unser Vorstellungsvermögen thätig ist, nahe zusammenhängt, ein sicherer Weg als der vorhergehende nicht betreten zu lassen, weshalb wir auch bei demselben, da er überhaupt nicht rein mathematischer Natur ist, hier nicht länger verweilen. Ganz übergehen durften wir diese Betrachtungen aber nicht, weil in denselben die Verschiedenheit der Methoden begründet ist, nach denen man bei Fernröhren und Mikroskopen die sogenannte Vergrösserung dieser Instrumente zu berechnen pflegt.

Es ist nämlich auf der Stelle klar, dass jederzeit bei Fernröhren der erste, bei Mikroskopen dagegen der zweite der beiden vorher betrachteten Fälle eintritt, wenn man über die verhältnissmässige Grösse der mit freiem Auge gesehenen Objecte und ihrer durch das Instrument betrachteten Bilder ein Urtheil fällen will. Deshalb nennt man, wovon nun wegen der sich leicht von selbst ergebenden Bedeutung der oben durch V, V_i' und W, W_i' bezeichneten Winkel ebenfalls sogleich der Grund von selbst in die Augen fallen wird, den absoluten Werth des Bruchs

$$\frac{V_i'}{V} = \frac{W_i'}{W}$$

die Vergrösserung des Fernrohrs. Denken wir uns aber bei dem Mikroskop dem Obigen zufolge das Object in die Weite des deutlichen Sehens Δ von dem Auge gerückt, wo sich sein Bild bekanntlich schon befindet, und setzen, indem die Winkel $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ zwar positiv und negativ, aber rücksichtlich ihrer absoluten Werthe nicht grösser als 90° genommen werden,

$$17) \quad q = \Delta \, tang \, \mathfrak{V}, \; r = \Delta \, tang \, \mathfrak{W};$$

so wird der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{V_i'}{\mathfrak{V}} = \frac{W_i'}{\mathfrak{W}}$$

die Vergrösserung des Mikroskops genannt. Weil nun aber nach 6) und 17)

$$\frac{tang\, V'_i}{tang\, \mathfrak{V}} = \frac{tang\, W'_i}{tang\, \mathfrak{W}} = \frac{q'_i}{q} = \frac{r'_i}{r}$$

oder näherungsweise

$$\frac{V'_i}{\mathfrak{V}} = \frac{W'_i}{\mathfrak{W}} = \frac{q'_i}{q} = \frac{r'_i}{r}$$

ist, so ergiebt sich jetzt der folgende für die gesammte Theorie der Fernröhre und Mikroskope sehr wichtige Satz:

Die Vergrösserung eines Fernrohrs wird jederzeit durch den absoluten Werth des Bruchs

$$\frac{V'_i}{V} = \frac{W'_i}{W},$$

die Vergrösserung eines Mikroskops dagegen jederzeit durch den absoluten Werth des Bruchs

$$\frac{q'_i}{q} = \frac{r'_i}{r}$$

bestimmt.

Die Formeln zur Berechnung der Vergrösserung sind im Obigen schon vollständig entwickelt worden, und brauchen daher hier nicht wiederholt zu werden. Bemerken müssen wir aber noch, dass sowohl bei Fernröhren als auch bei Mikroskopen durch das Vorzeichen des Bruchs

$$\frac{q'_i}{q} = \frac{r'_i}{r}$$

unmittelbar die Lage des Objects und seines Bildes gegen einander bestimmt wird. Ist dieser Bruch nämlich positiv, so steht, wie man zu sagen pflegt, das Bild in Bezug auf das Object aufrecht; ist dagegen der in Rede stehende Bruch negativ, so steht das Bild in Bezug auf das Object verkehrt.

Man hat hierin einen neuen Beweis, wie vollständig unsere

obigen Formeln alle in der Theorie der Fernröhre und Mikroskope vorkommenden Fragen zu beantworten geeignet sind.

§. 34.

Bei allen Fernröhren und Mikroskopen ist es in verschiedenen Rücksichten nöthig, den einzelnen Elementen derselben eine schickliche Grösse zu geben, und es ist von vorzüglicher Wichtigkeit, dieselbe auf dem Wege der Rechnung mit hinreichender Genauigkeit bestimmen zu können, wozu wir daher jetzt zunächst übergehen wollen.

Der grösste lineare Durchmesser eines jeden Elements, wobei die Voraussetzung zum Grunde liegt, dass, wie dies bei den Fernröhren und Mikroskopen stets der Fall ist, die äussersten Umfänge aller das Objectiv-System und das Ocular-System bildenden Elemente Kreislinien sind, wird die Oeffnung des in Rede stehenden Elements genannt.

Bezeichnen wir nun die halbe Oeffnung desersten Elements des Objectiv-Systems durch Q_1, so werden durch die in §. 28. mit

$$Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, \ldots Q_i$$

und

$$\acute{Q}_1, \acute{Q}_2, \acute{Q}_3, \acute{Q}_4, \ldots \acute{Q}_i$$

bezeichneten und zu berechnen gelehrten Grössen offenbar wenigstens mit grosser Annäherung die halben Oeffnungen bestimmt, welche den einzelnen Elementen der beiden Systeme gegeben werden müssen, wenn dieselben alle von einem Punkte in der gemeinschaftlichen Axe der beiden Systeme, dessen Entfernung von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems p ist, ausgehenden und auf das erste Element des Objectiv-Systems fallenden Strahlen, nachdem diese Strahlen an den verschiedenen Elementen Zurückwerfungen oder Brechungen erlitten haben, vollständig aufzunehmen und dem Auge zuzuführen im Stande sein sollen; und da nun offenbar unter übrigens gleichen Umständen die Helligkeit, mit der sich die Bilder dem Auge darstellen, lediglich durch die Grösse der Oeffnung des ersten Elements des Objectiv-Systems bedingt wird, so sollen im Folgenden die obigen Grössen die der Entfernung p entsprechenden Oeffnungshalbmesser der Elemente wegen der Helligkeit genannt werden.

Wie diese Oeffnungshalbmesser der Elemente wegen der Hel-

lichkeit aus der Oeffnung des ersten Elements des Objectiv-Systems berechnet werden können, ist schon in §. 28. ausführlich gezeigt worden, und bedarf einer vollständigen Wiederholung hier nicht. Jedoch scheinen uns die folgenden nachträglichen Bemerkungen über diesen wichtigen Gegenstand nöthig zu sein.

Es wird nämlich nach unserer Meinung bei dieser Berechnung das Zweckmässigste sein und zur Vereinfachung der allgemeinen Formeln beitragen, wenn man das Objectiv-System und das Ocular-System nicht mehr als zwei von einander getrennte Systeme, sondern vielmehr nur als ein einziges aus einer bestimmten Anzahl von Elementen, die etwa durch i bezeichnet werden mag, bestehendes System betrachtet. Dann hat man nach V. 56) überhaupt zur Bestimmung von Q_i aus Q_1 die folgende einfache Formel:

$$18)\quad Q_i = \frac{(p_1 - E_1)(p_2 - E_2)(p_3 - E_3)..(p_{i-1} - E_{i-1})}{(p_1 + D_1)(p_2 + D_2)(p_3 + D_3)..(p_{i-1} + D_{i-1})}\, Q_1,$$

wo die Grössen

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ \ldots\ p_{i-1}$$

mittelst der folgenden Formeln bestimmt werden müssen:

$$19)\quad p_1 = F'_1 + \frac{1}{p - F_1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2},$$

$$p_2 = F'_2 - \frac{1}{p - F_2}, \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(N_2)^2},$$

$$p_3 = F'_3 + \frac{1}{p - F_3} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{(N_3)^2},$$

$$p_4 = F'_4 - \frac{1}{p - F_4} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4}{(N_4)^2},$$

u. s. w.

$$p_{i-1} = F'_{i-1} + \frac{(-1)^{i-2}}{p - F_{i-1}} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 .. \mathfrak{M}_{i-1}}{(N_{i-1})^2}.$$

Aus der Gleichung IV. 64) ergeben sich aber, wenn wir die Anzahl der unter dem 1sten Elemente, der unter den 2 ersten Elementen, der unter den 3 ersten Elementen, u. s. w. der unter den i—1 ersten Elementen des Systems vorkommenden Linsen respective durch

$l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4, \ldots l_{i-1}$

bezeichnen, auch die folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{q}{q_1}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 = (-1)^{l_1} \cdot \frac{p - F_1}{p_1 - F'_1},$$

$$\left(\frac{q}{q_2}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 = (-1)^{l_2+1} \cdot \frac{p - F_2}{p_2 - F'_2},$$

$$\left(\frac{q}{q_3}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_3}\right)^2 = (-1)^{l_3+2} \cdot \frac{p - F_3}{p_3 - F'_3},$$

u. s. w.

$$\left(\frac{q}{q_{i-1}}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)^2 = (-1)^{l_{i-1}+(i-2)} \cdot \frac{p - F_{i-1}}{p_{i-1} - F'_{i-1}};$$

also

$$20)\quad p_1 = F'_1 + (-1)^{l_1} \cdot \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 (p - F_1)$$

$$= F'_1 + (-1)^{l_1} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (p - F_1),$$

$$p_2 = F'_2 + (-1)^{l_2+1} \cdot \left(\frac{q_2}{q}\right)^2 (p - F_2)$$

$$= F'_2 + (-1)^{l_2+1} \cdot \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 (p - F_2),$$

$$p_3 = F'_3 + (-1)^{l_3+2} \cdot \left(\frac{q_3}{q}\right)^2 (p - F_3)$$

$$= F'_3 + (-1)^{l_3+2} \cdot \left(\frac{r_3}{r}\right)^2 (p - F_3),$$

u. s. w.

$$p_{i-1} = F'_{i-1} + (-1)^{l_{i-1}+(i-2)} \cdot \left(\frac{q_{i-1}}{q}\right)^2 (p - F_{i-1})$$

$$= F'_{i-1} + (-1)^{l_{i-1}+(i-2)} \cdot \left(\frac{r_{i-1}}{r}\right)^2 (p - F_{i-1});$$

wobei wir auf den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdruck für die Vergrösserung bei Mikroskopen verweisen.

Wenn der absolute Werth von p so gross ist, dass man die Grössen

$$\frac{1}{p-F_1}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2},$$

$$\frac{1}{p-F_2}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{(N_2)^2},$$

$$\frac{1}{p-F_3}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3}{(N_3)^2},$$

$$\frac{1}{p-F_4}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_4}{(N_4)^2},$$

u. s. w.

$$\frac{(-1)^{i-2}}{p-F_{i-1}}\cdot\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3..\mathfrak{M}_{i-1}}{(N_{i-1})^2}$$

ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, so ist nach 19) näherungsweise

$$p_1=F'_1,\ p_2=F'_2,\ p_3=F'_3,\ ..\ p_{i-1}=F'_{i-1};$$

und folglich nach 18)

$$21)\ Q_i=\frac{(F'_1-E_1)(F'_2-E_2)(F'_3-E_3)..(F'_{i-1}-E_{i-1})}{(F'_1+D_1)(F'_2+D_2)(F'_3+D_3)..(F'_{i-1}+D_{i-1})}\ Q_1$$

oder

$$22)\ Q_i=\frac{\left(1-\frac{E_1}{F'_1}\right)\left(1-\frac{E_2}{F'_2}\right)\left(1-\frac{E_3}{F'_3}\right)..\left(1-\frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}}\right)}{\left(1+\frac{D_1}{F'_1}\right)\left(1+\frac{D_2}{F'_2}\right)\left(1+\frac{D_3}{F'_3}\right)..\left(1+\frac{D_{i-1}}{F'_{i-1}}\right)}\ Q_1.$$

Kann man nun aber wegen der Kleinheit der absoluten Werthe von

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ \ldots\ D_{i-1}$$

auch noch die Brüche

$$\frac{D_1}{F'_1},\ \frac{D_2}{F'_2},\ \frac{D_3}{F'_3},\ \frac{D_4}{F'_4},\ \cdots\ \frac{D_{i-1}}{F'_{i-1}}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist näherungsweise:

$$23)\ Q_i=\left(1-\frac{E_1}{F'_1}\right)\left(1-\frac{E_2}{F'_2}\right)\left(1-\frac{E_3}{F'_3}\right)..\left(1-\frac{E_{i-1}}{F'_{i-1}}\right)Q_1.$$

§. 35.

Zu einem bestimmten Ausdrucke für die Helligkeit, mit welcher die Bilder dem Auge sich darstellen, gelangt man durch die folgenden Betrachtungen.

In der Axe des Instruments denke man sich einen sehr kleinen Gegenstand A in der Entfernung p von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems, dessen Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit wir durch O, den Oeffnungshalbmesser der Pupille des Auges aber durch P bezeichnen wolle. Denken wir uns jetzt zuvörderst das erste Element des Objectiv-Systems und das Auge in derselben Entfernung p von dem Gegenstande A, und bezeichnen die Lichtmengen, welche unter dieser Voraussetzung von A auf das erste Element des Objectiv-Systems und die Pupille des Auges fallen, respective durch L_m und L'_m, so ist das Verhältniss dieser Lichtmengen offenbar dem Verhältnisse der Oberflächen des ersten Elements des Objectiv-Systems und der Pupille des Auges gleich, d. h. es ist

$$L_m : L'_m = O^2 . \pi : P^2 . \pi$$

oder

$$L_m : L'_m = O^2 : P^2 .$$

Denken wir uns nun aber das Auge in der Lage, in welcher es den Gegenstand A oder vielmehr dessen Bild durch das Instrument beschauet, und bezeichnen die Lichtmenge, welche in dieser Lage auf die Pupille des freien Auges von dem Gegenstande A fällt, durch $\mathfrak{L}_m$, so ist offenbar, wenn durch w und w' die Sehwinkel bezeichnet werden, unter denen der Halbmesser P der Pupille, aus A gesehen, in den beiden vorhergehenden Lagen des Auges erscheint:

$$L'_m : \mathfrak{L}_m = w : w' .$$

Bezeichnen wir aber ferner die Entfernung des Auges in seiner zweiten Lage von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems durch q, so ist offenbar

$$P = p \; tang \; w = (p + q) \; tang \; w' ,$$

also

$$tang \; w : tang \; w' = p + q : p ;$$

und weil nun wegen der grossen Kleinheit der Winkel w und w' jedenfalls mit grosser Annäherung

$$tang \; w : tang \; w' = w : w'$$

gesetzt werden kann, so ist

$$w : w' = p + q : p ;$$

also nach dem Obigen

$$L'_m : \mathfrak{L}_m = p + q : p .$$

Durch Zusammensetzung der beiden Proportionen

$$L_m : L'_m = O^2 : P^2$$

und

$$L'_m : \mathfrak{L}_m = p + q : p$$

erhält man aber auf der Stelle

$$L_m : \mathfrak{L}_m = (p + q) O^2 : p P^2$$

oder

$$L_m : \mathfrak{L}_m = \left(1 + \frac{q}{p}\right) O^2 : P^2 .$$

Von der ganzen Lichtmenge L_m wird natürlich auch das Bild erleuchtet, und dieselbe trifft auch, wenn nur, wie wir voraussetzen, die Oeffnungshalbmesser der sämmtlichen Elemente nach dem vorhergehenden Paragraphen richtig bestimmt worden sind, das Auge, kann aber natürlich nur dann, wenn der Oeffnungshalbmesser der Pupille nicht kleiner ist als der Oeffnungshalbmesser des letzten Elements des Ocular-Systems wegen der Helligkeit, auch ganz durch die Pupille in das Auge gelangen, und ihre vollständige Wirkung auf dasselbe ausüben. Bezeichnen wir jetzt also, unter der Voraussetzung, dass diese letztere Bedingung erfüllt sei, die Vergrösserung des Instruments durch V, so gelangt offenbar von jedem dem Gegenstande A gleichen Theile seines Bildes im Instrumente die Lichtmenge $\frac{L_m}{V^2}$ in's Auge, und wenn wir nun die Helligkeit des mit freiem Auge gesehenen Gegenstandes durch $\mathfrak{H}$, die Helligkeit seines durch das Instrument gesehenen Bildes durch H, natürlich bei gleicher Lage des Auges in beiden Fällen, bezeichnen, so ist offenbar

$$\mathfrak{L}_m : \frac{L_m}{V^2} = \mathfrak{H} : H .$$

Durch Zusammensetzung der beiden Proportionen

$$L_m : \mathfrak{L}_m = \left(1 + \frac{q}{p}\right) O^2 : P^2$$

und

$$\mathfrak{L}_m : \frac{L_m}{V^2} = \mathfrak{H} : H$$

ergiebt sich aber auf der Stelle

$$1 : \frac{1}{V^2} = \left(1 + \frac{q}{p}\right) O^2 \mathfrak{H} : P^2 H,$$

also

$$24) \quad H = \left(1 + \frac{q}{p}\right) \left(\frac{O}{VP}\right)^2 . \mathfrak{H} .$$

Nimmt man die Helligkeit des mit freiem Auge gesehenen Gegenstandes als Einheit der Helligkeiten an, so ist

$$25) \quad H = \left(1 + \frac{q}{p}\right) \left(\frac{O}{VP}\right)^2 .$$

Ist der Bruch $\frac{q}{p}$ so klein, dass man ihn ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten kann, so ist näherungsweise:

$$26) \quad H = \left(\frac{O}{VP}\right)^2 . \mathfrak{H} ,$$

oder, wenn man wieder die Helligkeit des mit freiem Auge gesehenen Gegenstandes als Einheit annimmt:

$$27) \quad H = \left(\frac{O}{VP}\right)^2 .$$

Es liegt nach dem Obigen hierbei die Voraussetzung zum Grunde, dass die Oeffnung der Pupille nicht kleiner als die Oeffnung des letzten Elements des Ocular-Systems wegen der Helligkeit ist, weil nur dann alles aus dem Instrumente heraustretende Licht in das Auge gelangen kann, und nur so lange die in Rede stehende Voraussetzung erfüllt ist, gelten die obigen Formeln. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist und der Oeffnungshalbmesser des letzten Elements des Ocular-Systems wegen der Helligkeit durch O_1 bezeichnet wird, so tritt von jedem dem Objecte gleichen Theile des Bildes nicht die ganze Lichtmenge $\frac{L_m}{V^2}$, sondern nur der Theil

$$\frac{L_m}{V^2} \cdot \frac{P^2}{O_1^2}$$

derselben wirklich in's Auge, und statt der obigen Proportion

$$\mathfrak{L}_m : \frac{L_m}{V_2} = \mathfrak{H} : H$$

erhalten wir daher jetzt die Proportion

$$\mathfrak{L}_m : \frac{L_m}{V^2} \cdot \frac{P^2}{O_1^2} = \mathfrak{H} : H,$$

welche, mit der aus dem Obigen bekannten Proportion

$$L_m : \mathfrak{L}_m = \left(1 + \frac{q}{p}\right) O^2 : P^2$$

zusammengesetzt, zu der Proportion

$$1 : \frac{1}{V^2} \cdot \frac{P^2}{O_1^2} = \left(1 + \frac{q}{p}\right) O^2 \mathfrak{H} : P^2 H,$$

also zu der Gleichung

$$28) \quad H = \left(1 + \frac{q}{p}\right) \left(\frac{O}{VO_1}\right)^2 . \mathfrak{H}$$

führt. Kann man den Bruch $\frac{q}{p}$ seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist

$$29) \quad H = \left(\frac{O}{VO_1}\right)^2 . \mathfrak{H} .$$

Nimmt man die Helligkeit des mit freiem Auge gesehenen Gegenstandes als Einheit an, so ist

$$30) \quad H = \left(1 + \frac{q}{p}\right) \left(\frac{O}{VO_1}\right)^2 ,$$

und wenn man den Bruch $\frac{q}{p}$ seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler als verschwindend zu betrachten berechtigt ist:

$$31) \quad H = \left(\frac{O}{VO_1}\right)^2 .$$

§. 36.

Durch die in §. 29. mit

$$\mathfrak{D}_2, \quad \mathfrak{D}_3, \quad \mathfrak{D}_4, \quad \mathfrak{D}_5, \ldots \mathfrak{D}_i$$

und

$$\mathfrak{D}'_1, \quad \mathfrak{D}'_2, \quad \mathfrak{D}'_3, \quad \mathfrak{D}'_4, \ldots \mathfrak{D}'_i$$

bezeichneten und zu berechnen gelehrten Grössen werden offenbar wenigstens mit grosser Annäherung die Oeffnungshalbmesser

bestimmt, welche den Elementen eines optischen Instruments vom zweiten an gegeben werden müssen, wenn durch dasselbe ein durch das Product $2p\,tang\,\varphi$, wobei über die Bedeutung der Zeichen §. 29. zu vergleichen ist, bestimmter Theil eines in der Entfernung p von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems befindlichen Gegenstandes soll übersehen werden können. Weil aber bei optischen Instrumenten der Winkel φ immer der Null sehr nahe kommend angenommen wird, so kann man unter Voraussetzung derselben Entfernung des Gegenstandes von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems den mit dem Instrumente deutlich übersehbaren Theil desselben dem Winkel φ proportional setzen; und da man nun jeden Gegenstand, welchen man durch ein optisches Instrument betrachtet, näherungsweise als einen mit der Entfernung des Gegenstandes von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen ansehen kann, so pflegt man den Ausdruck des bei einer bestimmten Entfernung p des Gegenstandes von dem ersten Elemente des Objectiv-Systems mit dem Instrumente deutlich übersehbaren Theils dieses Kreisbogens in Graden, Minuten und Secunden, dessen Hälfte dem Ausdrucke des Winkels φ in Graden, Minuten und Secunden gleich ist, das der Entfernung p entsprechende Gesichtsfeld des Instruments, die Grössen

$$\mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{D}_3,\ \mathfrak{D}_4,\ \mathfrak{D}_5,\ \ldots\ \mathfrak{D}_i$$

und

$$\acute{\mathfrak{D}}_1,\ \acute{\mathfrak{D}}_2,\ \acute{\mathfrak{D}}_3,\ \acute{\mathfrak{D}}_4,\ \ldots\ \acute{\mathfrak{D}}_i$$

aber die der Entfernung p entsprechenden Oeffnungshalbmesser der Elemente wegen des Gesichtsfeldes zu nennen.

Bei Fernröhren pflegt man meistens das Gesichtsfeld und die Oeffnungshalbmesser wegen des Gesichtsfeldes für eine als unendlich gross betrachtete Entfernung zu bestimmen, und diese Entfernung dann auch bei der Angabe des Gesichtsfeldes nicht weiter zu berücksichtigen.

Ueber die Berechnung der Oeffnungshalbmesser der Elemente wegen des Gesichtsfeldes für die Entfernung p ist schon in §. 29. das Erforderliche gesagt worden; jedoch scheinen noch die folgenden nachträglichen Bemerkungen über diesen Gegenstand einige Beachtung zu verdienen.

Am zweckmässigsten wird man wie im vorhergehenden Paragraphen auch hier das Objectiv-System und das Ocular-System nicht als zwei von einander getrennte Systeme, sondern vielmehr nur als ein einziges etwa aus i Elementen bestehendes System betrachten. Dann lassen sich nach V. 64) die der Entfernung p entsprechenden Oeffnungshalbmesser wegen des Gesichtsfeldes, nämlich die Grössen

$$\mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{D}_3,\ \mathfrak{D}_4,\ \mathfrak{D}_5,\ \ldots\ \mathfrak{D}_i;$$

mittelst der folgenden Formeln berechnen:

$$32)\quad \mathfrak{D}_2 = \frac{D_1 + E_1}{D_1 + F'_1 + \frac{1}{p - F_1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2}} \cdot \frac{M_1}{N_1} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_1}{p}},$$

$$\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{D}_2 = -\frac{D_2 + E_2}{D_2 + F'_2 - \frac{1}{p - F_2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{(N_2)^2}} \left\{ \frac{M_1 M_2}{N_2} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_2}{p}} + \mathfrak{D}_2 \right\},$$

$$\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{D}_3 = \frac{D_3 + E_3}{D_3 + F'_3 + \frac{1}{p - F_3} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3}{(N_3)^2}} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3}{N_3} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_3}{p}} - \mathfrak{D}_3 \right\},$$

$$\mathfrak{D}_5 - \mathfrak{D}_4 = -\frac{D_4 + E_4}{D_4 + F'_4 - \frac{1}{p - F_4} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4}{(N_4)^2}} \left\{ \frac{M_1 M_2 M_3 M_4}{N_4} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_4}{p}} + \mathfrak{D}_4 \right\},$$

u. s. w.

$$\mathfrak{D}_i - \mathfrak{D}_{i-1} =$$

$$\frac{D_{i-1} + E^i_{-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1} + \frac{(-1)^{i-2}}{p - F_{i-1}} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_{i-1}}{(N_{i-1})^2}} \left\{ (-1)^{i-2} \cdot \frac{M_1 \ldots M_{i-1}}{N_{i-1}} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_{i-1}}{p}} - \mathfrak{D}_{i-1} \right\}.$$

Für ein, absolut genommen, sehr grosses p ist hiernach oder nach V. 66):

$$33)\quad \mathfrak{D}_2 = \frac{D_1 + E_1}{D_1 + F'_1} \cdot \frac{M_1}{N_1}\ tang\,\varphi,$$

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{F'_2 - E_2}{D_2 + F'_2}\,\mathfrak{D}_2 - \frac{D_2 + E_2}{D_2 + F'_2} \cdot \frac{M_1 M_2}{N_2}\ tang\,\varphi,$$

$$\mathfrak{D}_4 = \frac{F'_3 - E_3}{D_3 + F'_3}\,\mathfrak{D}_3 + \frac{D_3 + E_3}{D_3 + F'_3} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3}{N_3}\ tang\,\varphi,$$

$$\mathfrak{Q}_3 = \frac{F'_4 - E_4}{D_4 + F'_4}\mathfrak{Q}_4 - \frac{D_4 + E_4}{D_4 + F'_4} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 M_4}{N_4} \operatorname{tang}\varphi,$$

u. s. w.

$$\mathfrak{Q}_i = \frac{F'_{i-1} - E_{i-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1}}\mathfrak{Q}_{i-1} + (-1)^{i-2} \cdot \frac{D_{i-1} + E_{i-1}}{D_{i-1} + F'_{i-1}} \cdot \frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_{i-1}}{N_{i-1}} \operatorname{tang}\varphi.$$

Ganz independente Ausdrücke der Grössen

$$\mathfrak{Q}_2,\ \mathfrak{Q}_3,\ \mathfrak{Q}_4,\ \mathfrak{Q}_5,\ \ldots\ \mathfrak{Q}_i$$

hieraus abzuleiten, hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

§. 37.

Das Auge erhält, um alles auf das erste Element des Objectiv-Systems fallende Licht auffangen zu können, offenbar da seine richtige Stelle, wo sich die vordere Fläche des ersten Elements des Objectiv-Systems abbildet, wenn man auf dieselbe von einem leuchtenden Gegenstande, etwa von dem hellen Himmel, Licht fallen lässt, weshalb man diesen Punkt auch den Ort des Auges nennt. Die Entfernung $\mathfrak{D}$ desselben von dem hintern Scheitel des letzten Elements des Ocular-Systems muss nach V. 50) mittelst der Formel

34) $\mathfrak{D} =$

$$F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 \mp \sqrt{1-(-1)^{i+1-i-i}\,\frac{4F_i}{\Delta}\left(1-\frac{F_i}{p}\right)\left(\frac{M'_1 M'_2 \ldots M'_i}{M_1 M_2 \ldots M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i}\right)^2}\right\}$$

bestimmt werden. Ist der absolute Werth von p sehr gross, so ist näherungsweise:

35) $\mathfrak{D} =$

$$F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 \mp \sqrt{1-(-1)^{i+1-i-i}\,\frac{4F_i}{\Delta}\left(\frac{M'_1 M'_2 \ldots M'_i}{M_1 M_2 \ldots M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i}\right)^2}\right\}.$$

Ist der absolute Werth von Δ sehr gross, so ist nach V. 52) näherungsweise:

36) $\mathfrak{D} =$

$$F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta \pm \left\{\tfrac{1}{2}\Delta - (-1)^{i+1-i-i}F_i\left(1-\frac{F_i}{p}\right)\left(\frac{M'_1 M'_2 \ldots M'_i}{M_1 M_2 \ldots M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i}\right)^2\right\};$$

und ist nun auch noch der absolute Werth von p sehr gross, so ist näherungsweise:

$$37)\quad \mathfrak{D} =$$

$$F'_i - \tfrac{1}{2}\Delta \pm \left\{ \tfrac{1}{2}\Delta - (-1)^{i+l-i-l} F_i \left(\frac{M'_1 M'_2 \ldots M'_i}{M_1 M_2 \ldots M_i} \cdot \frac{N_i}{N'_i} \right) \right\}^2.$$

Zur Bestimmung von $\mathfrak{E}$ hat man nach V. 43) auch die Gleichung:

$$38)\quad \mathfrak{E} = F'_i - F'_i$$

$$+ (-1)^{i+l-1} \cdot \frac{\frac{F_i}{p} + \frac{\mathfrak{D} - F'_i}{\Delta}}{F_i \left(1 - \frac{F_i}{p}\right)} \left(\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i} \right)^2,$$

und folglich, wenn der absolute Werth von p sehr gross ist, näherungsweise die Gleichung:

$$39)\quad \mathfrak{E} =$$

$$F'_i - F'_i + (-1)^{i+l-1} \cdot \frac{\mathfrak{D} - F'_i}{\Delta F_i} \left(\frac{M_1 M_2 M_3 \ldots M_i}{N_i} \right)^2.$$

§. 38.

Es ist für jetzt durchaus nicht unsere Absicht, eine vollständige und in's Einzelne gehende Untersuchung über die verschiedenen Arten der Fernröhre und Mikroskope, welche es geben kann, anzustellen; um jedoch die eigentliche Bedeutung der im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Formeln etwas mehr zu erläutern, wollen wir jetzt bloss die beiden einfachsten Fälle einer genaueren Betrachtung unterwerfen, wenn sowohl das Objectiv-System als auch das Ocular-System aus einer doppelt convexen Linse, und wenn das Objectiv-System aus einer doppelt convexen, das Ocular-System dagegen aus einer doppelt concaven Linse besteht. Der Betrachtung des ersten dieser beiden Fälle soll der vorliegende Paragraph gewidmet sein.

Wir denken uns jetzt also sowohl das Objectiv-System als auch das Ocular-System nur aus einer doppelt convexen Linse bestehend, und nehmen grösserer Bestimmtheit wegen im Folgenden

die positiven ersten Coordinaten in der Richtung von dem Objectiv-Systeme nach dem Ocular-Systeme hin.

Unter diesen Vorraussetzungen ist natürlich

$$i = 1,\ l = 1;\ \acute{i} = 1,\ \acute{l} = 1.$$

Ferner ist offenbar

R_1 positiv,
R'_1 negativ;
$\acute{R}_1$ positiv,
$\acute{R}'_1$ negativ.

Die Grössen p, Δ und $n_1 + 1$, $n'_1 + 1$ sind sämmtlich negativ, wie leicht ohne weitere Erläuterung erhellen wird. Nach IV. 20) ist

$$N_1 = 1,\ \acute{N}_1 = 1.$$

Bei der ganzen folgenden Untersuchung wollen wir der Einfachheit wegen von der Annahme ausgehen, dass die absoluten Werthe der Dicken D_1 und $\acute{D}_1$ der beiden das Objectiv-System und das Ocular-System bildenden Linsen so klein sind, dass die von denselben abhängenden Glieder keinen Einfluss auf die Vorzeichen der Ausdrücke, in denen sie vorkommen, ausüben, was man im Folgenden überall wohl beachten muss.

Nach III. 50*) ist

$$M_1 = -\left\{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R'_1}\right)+\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R'_1}\cdot\frac{D_1}{n_1}\right\}^{-1}$$

und

$$\acute{M}_1 = -\left\{(\acute{n}_1+1)\left(\frac{1}{\acute{R}_1}-\frac{1}{\acute{R}'_1}\right)+\frac{\acute{n}_1+1}{\acute{R}_1}\cdot\frac{\acute{n}_1+1}{\acute{R}'_1}\cdot\frac{\acute{D}_1}{\acute{n}_1}\right\}^{-1};$$

und nach III. 44) ist also

$$F_1 = -\left(1+\frac{n_1+1}{R'_1}\cdot\frac{D_1}{n_1}\right)M_1,$$

$$F'_1 = \left(1-\frac{n_1+1}{R'_1}\cdot\frac{D_1}{n_1}\right)M_1$$

und eben so

$$\acute{F}_1 = -\left(1 + \frac{\acute{n}_1 + 1}{\acute{R}_1} \cdot \frac{\acute{D}_1}{\acute{n}_1}\right) \acute{M}_1,$$

$$\acute{F}'_1 = \left(1 - \frac{\acute{n}_1 + 1}{\acute{R}_1} \cdot \frac{\acute{D}_1}{\acute{n}_1}\right) \acute{M}_1.$$

Weil $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{\acute{R}_1}$ positiv und $\frac{1}{R'_1}$, $\frac{1}{\acute{R}'_1}$ negativ sind, so sind die Differenzen

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \text{ und } \frac{1}{\acute{R}_1} - \frac{1}{\acute{R}'_1}$$

positiv; und weil nun $n_1 + 1$, $n'_1 + 1$ negativ sind, so sind die Moduli M_1 und $\acute{M}_1$ beide positiv. Also ist nach dem Obigen

F_1 negativ,
F'_1 positiv;
$\acute{F}_1$ negativ,
$\acute{F}_1$ positiv.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ haben wir nun zuvörderst nach 34) und 38) die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{D} = \acute{F}'_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

und

$$\mathfrak{E} = F'_1 - \acute{F}_1 - \frac{\frac{F_1}{p} + \frac{\mathfrak{D} - \acute{F}'_1}{\Delta}}{F_1\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)} M_1^2.$$

Die Brüche $\frac{F_1}{\Delta}$ und $\frac{F_1}{p}$ sind nach dem Obigen beide positiv, und die Grösse

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2$$

ist folglich positiv oder negativ, jenachdem

$$-p > -F_1 \text{ oder } -p < -F_1,$$

d. h. jenachdem

$$p < F_1 \text{ oder } p > F_1$$

ist.

Fassen wir zunächst bloss den ersten dieser beiden Fälle in's Auge, so sind die Grössen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ nur dann reell, wenn

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2 \leqq 1$$

ist, und dass diese Bedingung erfüllt sei, müssen wir daher im Folgenden voraussetzen.

Die Grösse

$$1 \mp \sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

ist offenbar positiv, und da nun nach dem Obigen $\dot{F}'_1$ positiv, dagegen Δ negativ ist, so sind offenbar die beiden obigen Werthe von $\mathfrak{D}$ positiv, wie es der Gebrauch des Instruments erfordert, und zugleich erhellet leicht, dass immer

$$\dot{F}_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

$$\leqq \dot{F}'_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

ist, so dass also im Allgemeinen das obere Zeichen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ einem kleineren Werthe dieser Grösse als das untere Zeichen entspricht.

Entwikelt man, unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2$$

eine der Null sehr nahe kommende Grösse ist, die Quadratwurzel

$$\sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, und bleibt bei dem zweiten Gliede dieser Reihe stehen, so erhält man

$$\mathfrak{D} = \begin{cases} \acute{F}'_1 - F_1 \left(1 - \frac{F_1}{p}\right) \left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2 \\ \acute{F}'_1 - \Delta + F_1 \left(1 - \frac{F_1}{p}\right) \left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2. \end{cases}$$

Führt man in die erste dieser beiden Gleichungen für M_1 und $\acute{M}_1$, indem man die Dicken D_1 und $\acute{D}_1$ als verschwindend betrachtet, ihre aus dem Obigen sich ergebenden Werthe $-F_1$ oder F'_1 und $\acute{F}'_1$ oder $-\acute{F}_1$ ein, so erhält man, indem man auch noch den Bruch $\frac{F_1}{p}$ als verschwindend betrachtet, für $\mathfrak{D}$ den Ausdruck

$$\frac{\acute{F}'_1 (F_1 - \acute{F}'_1)}{F_1} = \frac{\acute{F}_1 (\acute{F}_1 - F'_1)}{F'_1},$$

welcher ganz mit der Formel übereinstimmt, durch die in der praktischen Dioptrik der Ort des Auges bei dem astronomischen Fernrohre bestimmt zu werden pflegt, worüber man u. A. Praktische Dioptrik, als vollständige und gemeinfassliche Anleitung zur Verfertigung achromatischer Fernröhre. Nach den neuesten Verbesserungen und Hülfsmitteln und eigenen Erfahrungen. Von Johann Joseph Prechtl. Wien. 1828. S. 157. nachsehen kann.

Der Kürze wegen wollen wir jetzt annehmen, dass der absolute Werth von p so gross sei, dass die Grösse $\mathfrak{E}$ ohne merklichen Fehler mittelst der unmittelbar aus dem obigen allgemeinen Ausdrucke dieser Grösse fliessenden Formel

$$\mathfrak{E} = F'_1 - \acute{F}_1 - \frac{1}{F_1} \cdot \frac{\mathfrak{D} - \acute{F}'_1}{\Delta} M_1^2$$

bestimmt werden kann, wodei man zu beachten hat, dass $F_1' - \acute{F}_1$ eine positive Grösse ist.

Nach dem Obigen ist

$$\frac{\mathfrak{D}-\dot{F}'_1}{\Delta}=-\tfrac{1}{2}\left\{1\mp\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\},$$

und die Grösse

$$\frac{\mathfrak{D}-\dot{F}'_1}{\Delta}$$

ist folglich negativ. Weil nun nach dem Obigen auch F_1 negativ ist, so ist die Grösse

$$\frac{1}{F_1}\cdot\frac{\mathfrak{D}-\dot{F}'_1}{\Delta}M_1^2$$

positiv.

Wenn, indem p ungeändert bleibt, der absolute Werth von Δ wächst, so nimmt

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2,$$

welches bekanntlich positiv ist, ab, und

$$\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

nimmt folglich zu. Also nimmt

$$1\mp\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

ab oder zu, jenachdem man das obere oder untere Zeichen nimmt. Daher nimmt auch die positive Grösse

$$\frac{1}{F_1}\cdot\frac{\mathfrak{D}-\dot{F}'_1}{\Delta}M_1^2$$

ab oder zu, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das obere oder untere Zeichen nimmt.

Wenn also, indem p ungeändert bleibt, der absolute Werth von Δ wächst, so nimmt nach dem Obigen $\mathfrak{E}$ zu oder ab, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das obere oder untere Zeichen nimmt.

Wenn, indem Δ ungeändert bleibt, der absolute Werth von p wächst, so nimmt die positive Grösse

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2$$

zu, und

$$\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

nimmt folglich ab. Also nimmt

$$1 \mp \sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

zu oder ab, jenachdem man das obere oder untere Zeichen nimmt. Daher nimmt auch die positive Grösse

$$\frac{1}{F_1}\cdot\frac{\mathfrak{D}-\acute{F}'_1}{\Delta}M_1^2$$

zu oder ab, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das obere oder untere Zeichen nimmt.

Wenn also, indem Δ ungeändert bleibt, der absolute Werth von p wächst, so nimmt nach dem Obigen $\mathfrak{E}$ ab oder zu, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das obere oder untere Zeichen nimmt.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich, dass bei dem gewöhnlichen astronomischen Fernrohre unter Voraussetzung derselben Entfernung des Objects ein weitsichtiges Auge die Gläser mehr von einander entfernen muss als ein kurzsichtiges Auge, und dass ein und dasselbe Auge für entferntere Objecte die Gläser einander mehr nähern muss als für nähere Objecte.

Nach 5) ist

$$\frac{q'_1}{q}=\frac{r'_1}{r}=-\frac{M_1}{\acute{M}_1}\cdot\frac{\Delta}{p}\cdot\frac{1+\frac{\mathfrak{D}-\acute{F}'_1}{\Delta}}{1-\frac{F_1}{p}}.$$

Die Brüche $\frac{M_1}{\acute{M}_1}$ und $\frac{\Delta}{p}$ sind nach dem Obigen beide positiv, und der absolute Werth der negativen Grösse

$$\frac{\mathfrak{D}-F'_1}{\Delta}=-\tfrac{1}{2}\left\{1\mp\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

ist offenbar immer kleiner als die Einheit. Daher ist, weil nach dem Obigen bekanntlich $1-\frac{F_1}{p}$ eine positive Grösse ist, auch der Bruch

$$\frac{1+\frac{\mathfrak{D}-F'_1}{\Delta}}{1-\frac{F_1}{p}}$$

positiv, und $\frac{q'_1}{q}=\frac{r'_1}{r}$ ist folglich negativ, woraus sich ergiebt, dass das Bild in Bezug auf das Object eine verkehrte Lage hat.

Da

$$1-\tfrac{1}{2}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{1+\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

und

$$1-\tfrac{1}{2}\left\{1+\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

ist, so ist offenbar

$$1-\tfrac{1}{2}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

$$>1-\tfrac{1}{2}\left\{1+\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1}{M_1}\right)^2}\right\},$$

und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich also, dass das obere

Zeichen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ immer einen grösseren absoluten Werth von

$$\frac{q'_1}{q} = \frac{r'_1}{r}$$

liefert als das untere Zeichen.

Nach 10) ist

$$\frac{V'_1}{V} = \frac{W'_1}{W} = -\frac{M_1}{\dot{M}_1} \cdot \frac{1 - \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{L}}{p}}{1 - \frac{F_1}{p}} \left(1 + \frac{\mathfrak{D} - \dot{F}'_1}{\Delta}\right).$$

Ist der absolute Werth von p so gross, dass man die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{L}}{p} \text{ und } \frac{F_i}{p}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten kann, so ist

$$\frac{V'_1}{V} = \frac{W'_1}{W} = -\frac{M_1}{\dot{M}_1}\left(1 + \frac{\mathfrak{D} - \dot{F}'_1}{\Delta}\right).$$

Ist dann aber auch der absolute Werth von Δ so gross, dass man den Bruch

$$\frac{\mathfrak{D} - \dot{F}'}{\Delta}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten kann, so ist näherungsweise

$$\frac{V'_1}{V} = \frac{W'_1}{W} = -\frac{M_1}{\dot{M}_1}.$$

Für M_1 und $\dot{M}_1$ kann man ihre aus dem Obigen bekannten Werthe setzen. Setzt man nun z. B., indem man die Dicken D_1 und $\dot{D}_1$ als verschwindend betrachtet, $M_1 = F'_1$ und $\dot{M}_1 = -\dot{F}_1$, so wird

$$\frac{V'_1}{V} = \frac{W'_1}{W} = \frac{F'_1}{\dot{F}_1},$$

welches die bekannte Näherungsformel ist, mittelst welcher man die Vergrösserung des gewöhnlichen astronomischen Fernrohrs in der praktischen Dioptrik zu bestimmen pflegt, worüber Prechtl a. a. O. S. 159. nachgesehen werden kann.

Bezeichnen wir den Oeffnungshalbmesser des Objectivs durch Q_1, und, indem wir jedoch beide Systeme als ein aus zwei Elementen bestehendes System betrachten, den Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen der Helligkeit durch $\dot{Q}_1$, so ist nach 18)

$$\dot{Q}_1 = \frac{p_1 - \mathfrak{E}}{p_1 + D_1} Q_1,$$

und nach 19) ist

$$p_1 = F'_1 + \frac{1}{p - F_1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2},$$

oder, weil in dem vorliegenden Falle, wo das Element, aus welchem das Objectiv-System besteht, eine Linse ist, nach §. 19.

$$\mathfrak{M}_1 = - M_1{}^2$$

gesetzt werden muss, und weil nach dem Obigen $N_1 = 1$ ist:

$$p_1 = F'_1 - \frac{1}{p - F_1} M_1{}^2.$$

Also ist

$$\dot{Q}_1 = \frac{F'_1 - \mathfrak{E} - \frac{1}{p - F_1} M_1{}^2}{F'_1 + D_1 - \frac{1}{p - F_1} M_1{}^2} Q_1,$$

mittelst welcher Formel der Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen der Helligkeit aus dem Oeffnungshalbmesser des Objectivs bestimmt werden kann.

Nimmt man an, dass der absolute Werth von p sehr gross sei, setzt näherungsweise

$$\mathfrak{E} = F'_1 - \dot{F}_1,$$

und betrachtet D_1 als verschwindend, so erhält man zur Bestimmung von $\dot{Q}_1$ die Näherungsformel

$$\dot{Q}_1 = \frac{\dot{F}_1}{F'_1} Q_1,$$

oder nach dem Vorhergehenden

$$\dot{Q}_1 = Q_1 : \frac{\dot{V}_1}{V},$$

welches die bekannten Formeln sind, durch welche bei dem gewöhnlichen astronomischen Fernrohre in der praktischen Dioptrik der Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen der Helligkeit aus dem Oeffnungshalbmesser des Objectivs berechnet zu werden pflegt, worüber man Prechtl a. a. O. nachsehen kann.

Wie die Helligkeit selbst zu bestimmen ist, haben wir in §. 35. schon im Allgemeinen ausführlich gezeigt, und der dort entwickelte allgemein gültige Ausdruck ist natürlich auch in dem vorliegenden besondern Falle anwendbar.

Zur Bestimmung des Oeffnungshalbmessers $\dot{\mathfrak{D}}_1$ des Oculars wegen des Gesichtsfeldes hat man nach 32) die Formel

$$\dot{\mathfrak{D}}_1 = \frac{D_1 + \mathfrak{E}}{D_1 + F'_1 + \frac{1}{p - F_1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{(N_1)^2}} \cdot \frac{M_1}{N_1} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_1}{p}},$$

und folglich, weil $\mathfrak{M}_1 = -M_1^2$ und $N_1 = 1$ ist:

$$\dot{\mathfrak{D}}_1 = \frac{(D_1 + \mathfrak{E})\,M_1}{D_1 + F'_1 - \frac{1}{p - F_1} M_1^2} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_1}{p}}.$$

Nehmen wir an, dass der absolute Werth von p sehr gross sei, setzen

$$\mathfrak{E} = F'_1 - \dot{F}_1,$$

betrachten D_1 als verschwindend, und setzen dieser letzteren Voraussetzung zufolge $M_1 = F'_1$, endlich auch φ für $tang\,\varphi$, so erhalten wir

$$\dot{\mathfrak{D}}_1 = (F'_1 - \dot{F}_1)\,\varphi,$$

welches die bekannte Formel ist, mittelst welcher bei dem gewöhnlichen astronomischen Fernrohre der Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen des Gesichtsfeldes berechnet zu werden pflegt, worüber wieder Prechtl a. a. O. S. 160. nachgesehen werden kann.

Fassen wir jetzt ferner den zweiten der beiden oben von einander unterschiedenen Fälle näher in's Auge.

Da in diesem Falle die Grösse

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2$$

negativ ist, so sind die Werthe, welche die obigen allgemeinen Formeln für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ liefern, beide reell.

Die Grösse

$$1 \mp \sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

ist negativ oder positiv, jenachdem man das obere oder das untere Zeichen nimmt. Weil nun $\dot{F}'_1$ positiv, dagegen Δ negativ ist, so liefert das obere Zeichen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ für diese Grösse einen positiven oder einen negativen Werth, jenachdem

$$\tfrac{1}{2}\Delta\left\{1-\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\} \gtrless \dot{F}'_1$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\Delta\left\{1-\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\} > \dot{F}'_1$$

ist. Das untere Zeichen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ liefert für diese Grösse immer einen positiven Werth. Auch erhellet leicht, dass immer

$$\dot{F}'_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1-\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

$$< \dot{F}'_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1+\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

ist, und folglich das obere Zeichen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ stets einem kleineren Werthe dieser Grösse als das untere Zeichen entspricht.

Nach 5) ist

$$\frac{\dot{q}_1}{q} = \frac{\dot{r}_1}{r} = -\frac{M_1}{\dot{M}_1}\cdot\frac{\Delta}{p}\cdot\frac{1+\frac{\mathfrak{D}-\dot{F}'_1}{\Delta}}{1-\frac{F_1}{p}}.$$

Die Brüche $\frac{M_1}{M_1'}$ und $\frac{\Delta}{p}$ sind nach dem Obigen beide positiv, und $1 - \frac{F_1}{p}$ ist in dem vorliegenden Falle eine negative Grösse. Ferner ist

$$1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_1}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{M_1'}{M_1}\right)^2}\right\},$$

woraus sich ergiebt, dass die Grösse

$$1 + \frac{\mathfrak{D} - F'_1}{\Delta}$$

positiv oder negativ ist, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das obere oder untere Zeichen nimmt. Nimmt man daher in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das obere Zeichen, so ist $\frac{q'_1}{q} = \frac{r'_1}{r}$ nach dem Vorhergehenden positiv, und das Bild steht folglich in Bezug auf das Object aufrecht. Nimmt man dagegen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das untere Zeichen, so ist $\frac{q'_1}{q} = \frac{r'_1}{r}$ negativ, und das Bild steht folglich in Bezug auf das Object verkehrt. Auch ist klar, dass das obere Zeichen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ einem grössern absoluten Werthe von

$$\frac{q'_1}{q} = \frac{r'_1}{r}$$

als das untere Zeichen entspricht.

Für den Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen der Helligkeit hat man wieder den folgenden Ausdruck:

$$Q'_1 = \frac{F'_1 - \mathfrak{E} - \frac{1}{p - F_1} M_1^2}{F'_1 + D_1 - \frac{1}{p - F_1} M_1^2} Q_1,$$

und für den Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen des Gesichtsfeldes den Ausdruck:

$$\mathfrak{Q}'_1 = \frac{D_1 + \mathfrak{E}}{D_1 + F'_1 - \frac{1}{p - F_1} M_1^2} \cdot \frac{tang\,\varphi}{1 - \frac{F_1}{p}}.$$

Die Helligkeit wird auch jetzt mittelst der in §. 35. entwikkelten allgemeinen Formel bestimmt.

§. 39.

Wenn das Objectiv-System aus einer doppelt convexen, das Ocular-System dagegen aus einer doppelt concaven Linse besteht, so ist wieder

$$i=1,\quad l=1;\quad \acute{i}=1,\quad \acute{l}=1.$$

Nehmen wir ferner die positiven ersten Coordinaten wieder in der Richtung von dem Objectiv-Systeme nach dem Ocular-Systeme hin, so ist

$$R_1 \text{ positiv},$$
$$R'_1 \text{ negativ};$$
$$\acute{R}_1 \text{ negativ},$$
$$\acute{R}'_1 \text{ positiv}.$$

Die Grössen p, Δ und n_1+1, $\acute{n}_1+1$ sind wieder sämmtlich negativ; auch ist nach IV. 20)

$$N_1=1,\quad \acute{N}_1=1.$$

Nehmen wir nun wieder die absoluten Werthe der Dicken D_1 und $\acute{D}_1$ der beiden das Objectiv-System und das Ocular-System bildenden Linsen so klein an, dass die von denselben abhängenden Glieder keinen Einfluss auf die Vorzeichen der Ausdrücke, in denen sie vorkommen, ausüben; so erhellet aus den aus III. 50*) bekannten Ausdrücken

$$M_1=-\left\{(n_1+1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R'_1}\right)+\frac{n_1+1}{R_1}\cdot\frac{n_1+1}{R'_1}\cdot\frac{D_1}{n_1}\right\}^{-1}$$

und

$$\acute{M}_1=-\left\{(\acute{n}_1+1)\left(\frac{1}{\acute{R}_1}-\frac{1}{\acute{R}'_1}\right)+\frac{\acute{n}_1+1}{\acute{R}_1}\cdot\frac{\acute{n}_1+1}{\acute{R}'_1}\cdot\frac{\acute{D}_1}{\acute{n}_1}\right\}^{-1},$$

dass M_1 positiv, dagegen $\acute{M}_1$ negativ ist, weil nämlich die Differenzen

$$\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R'_1}\quad\text{und}\quad\frac{1}{\acute{R}_1}-\frac{1}{\acute{R}'_1}$$

offenbar respective positiv und negativ, und nach dem Vorhergehenden die Grössen n_1+1 und $\acute{n}_1+1$ beide negativ sind.

Nach III. 44) ist

$$F_1 = -\left(1 + \frac{n_1+1}{R'_1} \cdot \frac{D_1}{n_1}\right) M_1,$$

$$F'_1 = \left(1 - \frac{n_1+1}{R'_1} \cdot \frac{D_1}{n_1}\right) M_1;$$

und eben so

$$\acute{F}_1 = -\left(1 + \frac{\acute{n}_1+1}{\acute{R}'_1} \cdot \frac{\acute{D}_1}{\acute{n}_1}\right) \acute{M}_1,$$

$$\acute{F}'_1 = \left(1 - \frac{\acute{n}_1+1}{\acute{R}'_1} \cdot \frac{\acute{D}_1}{\acute{n}_1}\right) \acute{M}_1.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

F_1 negativ,
F'_1 positiv;
$\acute{F}_1$ positiv,
$\acute{F}'_1$ negativ.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ haben wir nach 34) und 38) die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{D} = \acute{F}'_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\acute{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

und

$$\mathfrak{E} = F'_1 - \acute{F}_1 - \frac{\frac{F_1}{p} + \frac{\mathfrak{D} - \acute{F}'_1}{\Delta}}{F_1\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)} M_1^2.$$

Die Brüche $\frac{F_1}{\Delta}$ und $\frac{F_1}{p}$ sind nach dem Obigen beide positiv, und die Grösse

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2$$

ist folglich positiv oder negativ, jenachdem

$$-p>-F_1 \text{ oder } -p<-F_1,$$

d. h. jenachdem

$$p<F_1 \text{ oder } p>F_1$$

ist.

Betrachten wir jetzt den ersten dieser beiden Fälle, so sind die Grössen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ nur dann reell, wenn

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2 \leqq 1$$

ist, und diese Bedingung müssen wir daher im Folgenden als erfüllt voraussetzen.

Die Grösse

$$1 \mp \sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

ist offenbar positiv, und da nun nach dem Obigen die Grössen $\dot{F}'_1$ und Δ beide negativ sind, so ist die Grösse $\mathfrak{D}$ positiv oder negativ, jenachdem

$$\dot{F}'_1 > \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 \mp \sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

oder

$$\dot{F}'_1 < \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 \mp \sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

ist. Auch erhellet leicht, dass immer

$$\dot{F}''_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 - \sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

$$\lessgtr \dot{F}'_1 - \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 + \sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

ist, und dass also im Allgemeinen das obere Zeichen in dem

Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ einem mit gehöriger Rücksicht auf sein Vorzeichen kleineren Werthe dieser Grösse als das untere Zeichen entspricht.

Entwickelt man, unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2$$

eine der Null sehr nahe kommende Grösse ist, die Quadratwurzel

$$\sqrt{1-\frac{4F_1}{\Delta}\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}$$

nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, und bleibt bei dem zweiten Gliede dieser Reihe stehen, so erhält man

$$\mathfrak{D} = \begin{cases} \dot{F}'_1 - F_1\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2 \\ \dot{F}'_1 - \Delta + F_1\left(1-\frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2 . \end{cases}$$

Führt man in die erste dieser beiden Gleichungen für M_1 und $\dot{M}_1$, indem man D_1 und $\dot{D}_1$ als verschwindend betrachtet, ihre aus dem Obigen sich ergebenden Werthe $-F_1$ oder F'_1 und $\dot{F}'_1$ oder $-\dot{F}_1$ ein, so erhält man für $\mathfrak{D}$, wenn man nur auch noch den Bruch $\frac{F_1}{p}$ als verschwindend betrachtet, den Ausdruck

$$\frac{\dot{F}'_1(F_1-\dot{F}'_1)}{F_1} = \frac{\dot{F}_1(\dot{F}_1-F'_1)}{F'_1},$$

welcher, weil nach dem Obigen die Grössen F'_1 und $\dot{F}_1$ beide positiv sind, positiv oder negativ ist, jenachdem $\dot{F}_1 > F'_1$ oder $\dot{F}_1 < F'_1$ ist.

Nach 5) ist

$$\frac{q'_1}{q} = \frac{r'_1}{r} = -\frac{M_1}{\dot{M}_1}\cdot\frac{\Delta}{p}\cdot\frac{1+\frac{\mathfrak{D}-\dot{F}'_1}{\Delta}}{1-\frac{F_1}{p}}.$$

Der Bruch $\frac{M_1}{\dot{M}_1}$ ist nach dem Obigen negativ, der Bruch $\frac{\Delta}{p}$ dagegen ist positiv. Die Grössen $1 - \frac{F_1}{p}$ und

$$1 + \frac{\mathfrak{D} - \dot{F}'_1}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F_1}{\Delta}\left(1 - \frac{F_1}{p}\right)\left(\frac{\dot{M}_1}{M_1}\right)^2}\right\}$$

sind offenbar beide positiv. Also ist $\frac{q'_1}{q} = \frac{r'_1}{r}$ eine positive Grösse, woraus sich ergiebt, dass das Bild in Bezug auf das Object aufrecht steht. Auch ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar, dass das obere Zeichen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ jederzeit einen grösseren Werth der positiven Grösse

$$\frac{q'_1}{q} = \frac{r'_1}{r}$$

als das untere Zeichen liefert.

Für die Grösse

$$\frac{\dot{V}_1}{V} = \frac{\dot{W}_1}{W}$$

und die beiden Grössen $\dot{Q}_1$ und $\dot{\mathfrak{Q}}_1$ kann man ganz ähnliche Ausdrücke entwickeln wie im vorhergehenden Paragraphen, wobei wir, weil beide Entwickelungen sich in etwas Wesentlichem nicht von einander unterscheiden, hier nicht länger verweilen wollen.

Endlich wollen wir rücksichtlich des zweiten der beiden oben von einander unterschiedenen Fälle auch nur bemerken, dass, wie man leicht findet,

$$\frac{q'_1}{q} = -\frac{r'_1}{r}$$

positiv oder negativ ist, und dass also das Bild in Bezug auf das Object aufrecht oder verkehrt steht, jenachdem man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}$ das untere oder obere Zeichen nimmt. Weitere Betrachtungen über diesen Fall können wir nach den im Vorhergehenden gegebenen Entwickelungen füglich dem eignen Nachdenken des Lesers überlassen, indem überhaupt mehr in's Einzelne gehende Untersuchungen für jetzt eigentlich nicht zu unserem Zwecke gehören.

Erster Anhang.

Von den einem gegebenen Halbkreise oder einer gegebenen Halbkugelfläche entsprechenden Bildern gegebener Curven.

§. 1.

I. Wir wollen uns eine Halbkugelfläche denken, die Axe der x des rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz durch deren Mittelpunkt legen, und ihren Durchschnittspunkt mit der Axe der x als Anfang der xyz annehmen. Den Halbmesser dieser Halbkugelfläche betrachten wir als positiv oder negativ, jenachdem er von dem Anfange der Coordinaten an nach der Richtung der positiven oder nach der Richtung der negativen x hin liegt, und bezeichnen denselben unter dieser Voraussetzung durch R. Ist nun (pqr) ein beliebiger Punkt und (xyz) das der Halbkugelfläche entsprechende Bild dieses Punktes, so haben wir bekanntlich nach Kap. II. Nr. 130. zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z dieses Bildes, wenn μ seine bekannte Bedeutung hat, die folgenden ganz genauen Formeln:

$$1)\quad \begin{cases} x - R = -\dfrac{\mu R}{R + (1+\mu)(p-R)\sqrt{1 + \dfrac{q^2+r^2}{(p-R)^2}}}\,(p-R), \\ y = -\dfrac{\mu R}{R + (1+\mu)(p-R)\sqrt{1 + \dfrac{q^2+r^2}{(p-R)^2}}}\,q, \\ z = -\dfrac{\mu R}{R + (1+\mu)(p-R)\sqrt{1 + \dfrac{q^2+r^2}{(p-R)^2}}}\,r. \end{cases}$$

Denken wir uns nun aber den Punkt $(p\,q\,r)$ als einer gewissen Curve im Raume, deren Gleichungen gegeben sind, angehörend, so sind zwischen den Coordinaten p, q, r zwei Gleichungen gegeben, welche in Verbindung mit den Gleichungen 1) fünf Gleichungen zwischen den sechs Grössen x, y, z und p, q, r liefern, aus denen sich die Grössen p, q, r gänzlich eliminiren lassen, wodurch man jederzeit zwei Gleichungen zwischen den Grössen x, y, z erhält, welche eine Curve im Raume charakterisiren, die das Bild der gegebenen Curve im Raume ist, in welcher der Punkt (p, q, r) liegt.

II. Auf ganz ähnliche Art wie vorher können wir uns auch, alle Betrachtungen auf eine Ebene einschränkend, einen Halbkreis denken, durch dessen Mittelpunkt wieder die Axe der x gelegt wird. Den Durchschnittspunkt dieses Halbkreises mit der Axe der x nehmen wir als Anfang des rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, und betrachten den Halbmesser R des Halbkreises als positiv oder als negativ, jenachdem er von dem Anfange der Coordinaten an nach der Seite der positiven oder nach der Seite der negativen x hin liegt. Ist nun $(p\,q)$ ein beliebiger Punkt und $(x\,y)$ das dem Halbkreise entsprechende Bild dieses Punktes, so haben wir bekanntlich nach Kap. II. Nr. 130. zur Bestimmung der Coordinaten x, y dieses Bildes, wenn μ seine bekannte Bedeutung auch jetzt behält, die folgenden ganz genauen Formeln:

$$2)\quad \begin{cases} x - R = -\dfrac{\mu R}{R + (1+\mu)(p-R)\sqrt{1 + \left(\dfrac{q}{p-R}\right)^2}}\,(p-R), \\ y = -\dfrac{\mu R}{R + (1+\mu)(p-R)\sqrt{1 + \left(\dfrac{q}{p-R}\right)^2}}\,q. \end{cases}$$

Denken wir uns nun aber wieder den Punkt $(p\,q)$ als einer gewissen Curve, deren Gleichung gegeben ist, angehörend, so ist zwischen den Coordinaten p, q eine Gleichung gegeben, welche in Verbindung mit den Gleichungen 2) zwischen den vier Grössen x, y und p, q drei Gleichungen liefert, aus denen sich die Grössen p, q ganz eliminiren lassen, wodurch man eine Gleichung zwischen den Grössen x, y erhält, welche jederzeit eine Curve charakterisirt,

die das Bild der gegebenen Curve ist, in welcher der Punkt (pq) liegt.

III. Indem wir jetzt nochmals zu dem Falle I. zurückkehren, so ist zu bemerken, dass man den Punkt (pqr) in diesem Falle auch nur als einer gewissen Fläche, deren Gleichung gegeben ist, angehörend betrachten kann. Dann ist zwischen den Coordinaten p, q, r eine Gleichung gegeben, welche in Verbindung mit den Gleichungen 1) zwischen den sechs Grössen x, y, z und p, q, r vier Gleichungen liefert, aus denen sich die Grössen p, q, r sämmtlich eliminiren lassen, wodurch man zwischen den Grössen x, y, z eine Gleichung erhält, welche jederzeit eine Fläche charakterisirt, die das Bild der gegebenen Fläche ist, in welcher der Punkt (pqr) liegt.

§. 2.

Wir wollen jetzt annehmen, dass in dem einfachsten Falle §. 1. II. die gegebene Curve, in welcher der Punkt (pq) liegt, eine auf der Axe der x senkrecht stehende gerade Linie sei. Dann ist p, und folglich auch $p-R$ eine constante Grösse, die wir durch A bezeichnen, also

$$3) \quad p - R = A$$

setzen wollen. Setzen wir dann noch

$$4) \quad x - R = X, \; y = Y;$$

so haben wir nach 2) die folgenden Gleichungen:

$$5) \quad \begin{cases} X = -\dfrac{\mu R}{R + (1+\mu) A \sqrt{1 + \left(\frac{q}{A}\right)^2}} A, \\ Y = -\dfrac{\mu R}{R + (1+\mu) A \sqrt{1 + \left(\frac{q}{A}\right)^2}} q; \end{cases}$$

aus denen sogleich durch Division

$$6) \quad \frac{q}{A} = \frac{Y}{X}$$

folgt. Führen wir diesen Werth von $\frac{q}{A}$ in die erste der Gleichungen 5) ein, so erhalten wir

$$7)\quad X = -\frac{\mu R}{R+(1+\mu)A\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}}\,A$$

oder

$$8)\quad \frac{A}{X} = -\frac{1}{\mu} - \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{A}{R}\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2},$$

also

$$9)\quad \frac{1}{\mu}+\frac{A}{X} = -\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{A}{R}\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}.$$

Machen wir nun diese Gleichung rational, so erhalten wir die Gleichung

$$10)\quad \left(A+\frac{1}{\mu}X\right)^2 = \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}(X^2+Y^2),$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet, die Gleichung:

$$11)\quad \left.\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}Y^2\\ &-\left\{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}\right\}X^2\\ &-\frac{2}{\mu}AX-A^2\end{aligned}\right\} = 0.$$

Für $Y=0$ erhält man aus der Gleichung 10)

$$A+\frac{1}{\mu}X = \pm\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{A}{R}X,$$

also

$$12)\quad X = -\frac{A}{\frac{1}{\mu}\mp\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{A}{R}}.$$

Das arithmetische Mittel zwischen diesen beiden Werthen von X ist, wie man leicht findet:

$$-\frac{\frac{1}{\mu}A}{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}}.$$

Setzt man nun allgemein

$$13)\quad X = -\frac{\frac{1}{\mu}A}{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}}+X_1,\quad Y=Y_1;$$

so wird die Gleichung 10) oder 11), wie man nach leichter Rechnung findet:

$$14)\quad \left\{\frac{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{A}{R}}\right\}^2\cdot\left(\frac{X_1}{A}\right)^2-\left\{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}\right\}\cdot\left(\frac{Y_1}{A}\right)^2=1.$$

Ist nun

$$\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}>0,$$

so können wir, indem a und b positive Grössen bezeichnen:

$$15)\quad \begin{cases} a^2=\left\{\dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{A}{R}}{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}}\right\}^2, \\ b^2=\dfrac{1}{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}} \end{cases}$$

setzen, wodurch die Gleichung 14) die Gestalt

$$16)\quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{X_1}{A}\right)^2-\frac{1}{b^2}\left(\frac{Y_1}{A}\right)^2=1$$

oder

$$17)\quad \left(\frac{X_1}{aA}\right)^2-\left(\frac{Y_1}{bA}\right)^2=1$$

erhält, welches bekanntlich die Gleichung einer Hyperbel ist.

Ist ferner

$$\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}<0,$$

so können wir, indem a und b wieder positive Grössen bezeichnen:

$$18)\quad \begin{cases} a^2 = \left\{ \dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{A}{R}}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}-\frac{1}{\mu^2}} \right\}^2, \\ b^2 = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}-\frac{1}{\mu^2}} \end{cases}$$

setzen, wodurch die Gleichung 14) die Gestalt

$$19)\quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{X_1}{A}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Y_1}{A}\right)^2=1$$

oder

$$20)\quad \left(\frac{X_1}{aA}\right)^2+\left(\frac{Y_1}{bA}\right)^2=1$$

erhält, welches bekanntlich die Gleichung einer Ellipse ist.

Sollte diese Ellipse in einen Kreis übergehen, so müsste $a^2=b^2$, also nach 18)

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}-\frac{1}{\mu^2},$$

d. i.

$$\frac{1}{\mu^2}=0 \text{ oder } \frac{1}{\mu}=0$$

sein.

Zwischen a und b findet sowohl im Falle der Hyperbel, als auch im Falle der Ellipse die Relation

$$21)\quad a^2=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}\,b^4$$

Statt.

Ist endlich

$$\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}=0,$$

so wird die Gleichung 11):

$$22)\quad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}\,Y^2-\frac{2}{\mu}AX-A^2=0,$$

und für $Y=0$ ist also in diesem Falle

$$23)\quad X = -\tfrac{1}{2}\mu A.$$

Setzen wir nun allgemein

$$24)\quad X = -\tfrac{1}{2}\mu A + X_1, \quad Y = Y_1;$$

so erhält die Gleichung 22) folgende Gestalt:

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2 \frac{A}{R^2} Y_1^2 - \frac{2}{\mu} X_1 = 0$$

oder

$$25)\quad Y_1^2 = \frac{2\mu R^2}{(1+\mu)^2 A} X_1 = -\frac{2\mu R^2}{(1+\mu)^2 A}(-X_1),$$

welches bekanntlich die Gleichung einer Parabel ist, deren Parameter

$$\frac{2\mu R^2}{(1+\mu)^2 A} \text{ oder } -\frac{2\mu R^2}{(1+\mu)^2 A}$$

ist, jenachdem die Grösse $\frac{\mu}{A}$ positiv oder negativ ist.

Man sieht also, dass das Bild einer auf der Axe der x senkrecht stehenden geraden Linie sowohl eine Hyperbel, als auch eine Ellipse, als auch eine Parabel sein kann.

Es würden sich über die Lage der vorher bestimmten Kegelschnitte noch manche geometrische Betrachtungen anstellen lassen, die wir jedoch der Kürze wegen übergehen und nur noch Folgendes bemerken wollen.

Für $q = 0$ ist nach 5)

$$26)\quad X = -\frac{\mu A R}{R + (1+\mu)A}, \quad Y = 0;$$

also nach 13), wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$27)\quad X_1 = \frac{\mu(1+\mu)A^2 R}{R^2 - (1+\mu)^2 A^2}, \quad Y_1 = 0.$$

Die Werthe 5) von X und Y kann man, wie leicht erhellen wird, auf folgende Art darstellen:

$$X = -\frac{\mu A R}{R + (1+\mu)A\sqrt{1+\left(\frac{q}{A}\right)^2}},$$

$$Y = -\frac{\mu R}{\frac{R}{q} \pm (1+\mu)\sqrt{1+\left(\frac{A}{q}\right)^2}};$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grösse $\frac{A}{q}$ positiv oder negativ ist. Nähert sich nun der absolute Werth von q dem Unendlichen, so nähern X und Y sich respective den Gränzen 0 und $\mp\frac{\mu R}{1+\mu}$, also nach 13) die Grössen X_1 und Y_1 respective den Gränzen

$$\frac{\frac{1}{\mu}A}{\frac{1}{\mu^2}-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\frac{A^2}{R^2}} \text{ und } \mp\frac{\mu R}{1+\mu}$$

oder

$$\frac{\mu A R^2}{R^2-(1+\mu)^2 A^2} \text{ und } \mp\frac{\mu R}{1+\mu}.$$

Die Werthe, welche X_1 für $q=0$ und $=\pm\infty$ erhält, verhalten sich also wie $(1+\mu)A:R$ zu einander.

§. 3.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der Punkt (pq) in einer Kreislinie liege, deren Gleichung

$$28)\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

sein mag. Setzen wir dann

$$29)\quad x-R=X,\quad y=Y;$$

und

$$30)\quad p-R=P,\quad q=Q;$$

so wie

$$31)\quad a-R=A,\quad b=B;$$

wo nun die Coordinaten A, B; P, Q; X, Y alle wieder auf dasselbe Coordinatensystem bezogen sind; so haben wir nach dem Obigen die drei folgenden Gleichungen:

$$32)\quad \begin{cases} (P-A)^2+(Q-B)^2=r^2, \\ X=-\dfrac{\mu R}{R+(1+\mu)P\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P}\right)^2}}P, \\ Y=-\dfrac{\mu R}{R+(1+\mu)P\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P}\right)^2}}Q; \end{cases}$$

oder

$$33)\quad \begin{cases} (P-A)^2+(Q-B)^2=r^2, \\ \frac{1}{\mu}+\frac{P}{X}=-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{P}{R}\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P}\right)^2}, \quad \frac{Q}{P}=\frac{Y}{X}; \end{cases}$$

aus denen die Grössen P und Q eliminirt werden müssen, welches sehr leicht ist, da nämlich auf der Stelle

$$34)\quad \begin{cases} P=-\dfrac{RX}{\mu R+(1+\mu)X\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}}, \\ Q=-\dfrac{RY}{\mu R+(1+\mu)X\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}}; \end{cases}$$

also

$$35)\quad \left\{\left(A+\frac{RX}{\mu R+(1+\mu)X\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}}\right)^2+\left(B+\frac{RY}{\mu R+(1+\mu)X\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}}\right)^2\right\}=r^2$$

erhalten wird.

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$36)\quad \left\{R(\mu A+X)+(1+\mu)AX\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}\right\}^2 + \left\{R(\mu B+Y)+(1+\mu)BX\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}\right\}^2 = r^2\left\{\mu R+(1+\mu)X\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}\right\}^2,$$

und entwickelt die Quadrate, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$37)\quad R^2\{\mu^2(A^2+B^2-r^2)+2\mu(AX+BY)+X^2+Y^2\} +(1+\mu)^2(A^2+B^2-r^2)(X^2+Y^2) =-2(1+\mu)RX\{\mu(A^2+B^2-r^2)+AX+BY\}\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}.$$

Macht man diese Gleichung rational, so erhält man

$$R^4\left\{\mu^2(A^2+B^2-r^2)+2\mu(AX+BY)+X^2+Y^2\right\}^2$$
$$+(1+\mu)^4(A^2+B^2-r^2)^2(X^2+Y^2)^2$$
$$=2(1+\mu)^2R^2\left\{\begin{matrix}\mu^2(A^2+B^2-r^2)^2+2\mu(A^2+B^2-r^2)(AX+BY)\\+2(AX+BY)^2-(A^2+B^2-r^2)(X^2+Y^2)\end{matrix}\right\}(X^2+Y^2)$$

oder

$$R^4\left\{\mu^2(A^2+B^2-r^2)+2\mu(AX+BY)+X^2+Y^2\right\}^2$$
$$+(1+\mu)^4(A^2+B^2-r^2)^2(X^2+Y^2)^2$$
$$=2(1+\mu)^2R^2\left\{\begin{matrix}\mu^2(A^2+B^2-r^2)^2+2\mu(A^2+B^2-r^2)(AX+BY)\\+(AX+BY)^2-(AY-BX)^2+r^2(X^2+Y^2)\end{matrix}\right\}(X^2+Y^2).$$

Subtrahirt man aber auf beiden Seiten dieser Gleichung das doppelte Product der beiden quadrirten Grössen auf der linken Seite, so erhält man:

$$38)\ \left\{\begin{matrix}\mu^2R^2(A^2+B^2-r^2)+2\mu R^2(AX+BY)\\+(R^2-(1+\mu)^2(A^2+B^2-r^2))(X^2+Y^2)\end{matrix}\right\}^2$$
$$=4(1+\mu)^2R^2\left\{r^2(X^2+Y^2)-(AY-BX)^2\right\}(X^2+Y^2).$$

Für $A=B=0$ wird diese Gleichung

$$\left\{(R^2+(1+\mu)^2r^2)(X^2+Y^2)-\mu^2R^2r^2\right\}^2$$
$$=4(1+\mu)^2R^2r^2(X^2+Y^2)^2,$$

also

$$(R^2+(1+\mu)^2r^2)(X^2+Y^2)-\mu^2R^2r^2$$
$$=\pm2(1+\mu)Rr(X^2+Y^2),$$

und folglich

$$\left\{R^2\mp2(1+\mu)Rr+(1+\mu)^2r^2\right\}(X^2+Y^2)=\mu^2R^2r^2,$$

d. i.

$$\left\{R \mp (1+\mu)\, r\right\}^2 (X^2 + Y^2) = \mu^2 R^2 r^2,$$

also

$$39)\quad X^2 + Y^2 = \left\{\frac{\mu R r}{R \mp (1+\mu)\, r}\right\}^2,$$

welches die Gleichung eines Kreises ist.

Es ist hier aber noch eine Bestimmung nöthig, wie man das Zeichen zu nehmen hat, die auf folgende Art gegeben werden kann.

Die Gleichung 37) ist im vorliegenden Falle:

$$40)\quad \left\{R^2 - (1+\mu)^2\, r^2\right\}(X^2 + Y^2) - \mu^2 R^2 r^2$$
$$= 2\mu(1+\mu) R r^2 X \sqrt{\left(1 + \frac{Y}{X}\right)^2}$$

Setzt man nun

$$X\sqrt{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2} = \pm \frac{\mu R r}{R \mp (1+\mu) r},$$

so wird diese Gleichung, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$0 = 0.$$

Setzt man aber

$$X\sqrt{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2} = \mp \frac{\mu R r}{R \mp (1+\mu) r},$$

so wird die Gleichung 40), wie man leicht findet:

$$R \mp (1+\mu) r = 0.$$

Also muss man offenbar

$$X\sqrt{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2} = \pm \frac{\mu R r}{R \mp (1+\mu) r}$$

setzen. Führt man dies in die Gleichungen 34) ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$P = - \frac{R \mp (1+\mu) r}{\mu R} X,$$

$$Q = - \frac{R \mp (1+\mu) r}{\mu R} Y;$$

also

$$41) \quad \begin{cases} X = - \dfrac{\mu R}{R \mp (1+\mu) r} P, \\ Y = - \dfrac{\mu R}{R \mp (1+\mu) r} Q. \end{cases}$$

Weil nun aber im vorliegenden Falle nach 32)

$$P^2 + Q^2 = r^2$$

und r natürlich stets positiv ist, so ist

$$P \sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2} = \mp r,$$

und in dieser Formel das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem P negativ oder positiv ist. Folglich ist nach 32)

$$42) \quad \begin{cases} X = - \dfrac{\mu R}{R \mp (1+\mu) r} P, \\ Y = - \dfrac{\mu R}{R \mp (1+\mu) r} Q; \end{cases}$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem P negativ oder positiv ist.

Vergleicht man jetzt die Gleichungen 42) mit den Gleichungen 41), so ergiebt sich, dass auch in der Gleichung 39) das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem P negativ oder positiv ist. So lange also P positiv ist, ist

$$43) \quad X^2 + Y^2 = \left\{\frac{\mu R r}{R + (1+\mu) r}\right\}^2.$$

So lange dagegen P negativ ist, ist

$$44) \quad X^2 + Y^2 = \left\{\frac{\mu R r}{R - (1+\mu) r}\right\}^2.$$

Ist $\mu = 1$, so ist, so lange P positiv ist:

$$45)\quad X^2+Y^2=\left(\frac{Rr}{R+2r}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{1}{r}+\frac{2}{R}}\right)^2;$$

dagegen ist in diesem Falle, so lange P negativ ist:

$$46)\quad X^2+Y^2=\left(\frac{Rr}{R-2r}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{2}{R}}\right)^2.$$

Dass in diesem Falle der Kreis, in welchem der Punkt $(p\,q)$ oder $(P\,Q)$ liegend angenommen wird, mit dem zurückwerfenden oder brechenden Kreise concentrisch ist, erhellet auf der Stelle daraus, weil $A=0$, $B=0$, also nach 31)

$$a-R=0,\quad b=0;$$

d. i.

$$a=R,\quad b=0$$

ist.

Zweiter Anhang.

Ueber die Reflexion bei den Kegelschnitten.

Weil in neuerer Zeit in der Optik wieder zuweilen, z. B. bei den Spiegel-Mikroskopen nach Amici's Construction, elliptische Spiegel mit Glück angewandt worden sind, eine gründliche und allgemeine Untersuchung der Reflexion bei den Kegelschnitten mir aber überhaupt bisher nicht bekannt geworden ist, so halte ich es für zweckmässig, in dem Folgenden eine solche Untersuchung mitzutheilen, wobei ich jedoch für jetzt das in dem vorliegenden ersten Theile meiner optischen Untersuchungen stets befolgte Princip, auf die sogenannten Abweichungen vorläufig nirgends Rücksicht zu nehmen, ebenfalls festhalten, diese Untersuchung aber mit möglichster Strenge und Allgemeinheit zu führen suchen werde. Genügend wird es übrigens sein, derselben die Betrachtung der Ellipse zum Grunde zu legen, weil sich daraus auf bekannte Weise der Fall der Hyperbel unmittelbar, und der Fall der Parabel mittelst einiger leichten Transformationen der erhaltenen Ausdrücke herleiten lässt. Vorzüglich werde ich natürlich mein Augenmerk darauf richten, ganz allgemeine Formeln zur Bestimmung der Lage des Bildes eines strahlenden Punktes zu gewinnen, und zugleich den Begriff des Bildes gehörig festzustellen. Ueber die sogenannte Abweichung wegen der Gestalt bei nach Kegelschnitten gekrümmten Spiegeln muss ich weitere Untersuchungen den folgenden Theilen dieses Werkes vorbehalten.

I.

Die Gleichung einer Ellipse sei

$$1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und P, Q seien die Coordinaten eines in deren Ebene liegenden Punktes (PQ).

Von diesem Punkte gehe ein Strahl aus, welcher mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt (PQ) gelegten, dem primitiven Coordinatensysteme der x, y parallelen Coordinatensystems den von dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden neuen Coordinatensystems an durch dessen Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel Θ einschliesst, und treffe die Ellipse in dem durch die Coordinaten X, Y bestimmten Punkte (XY).

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten sind

$$X-P, \quad Y-Q$$

die Coordinaten des Punktes (XY) in Bezug auf ein durch den Punkt (PQ) gelegtes, dem primitiven Systeme paralleles System. Dieselben Coordinaten sind aber offenbar auch

$$\cos\Theta\sqrt{(X-P)^2+(Y-Q)^2},\ \sin\Theta\sqrt{(X-P)^2+(Y-Q)^2};$$

und wir haben daher die folgenden Gleichungen:

$$2)\begin{cases} X-P=\cos\Theta\sqrt{(X-P)^2+(Y-Q)^2} \\ Y-Q=\sin\Theta\sqrt{(X-P)^2+(Y-Q)^2}; \end{cases}$$

oder

$$3)\begin{cases} X=P+\cos\Theta\sqrt{(X-P)^2+(Y-Q)^2}, \\ Y=Q+\sin\Theta\sqrt{(X-P)^2+(Y-Q)^2}; \end{cases}$$

aus denen sogleich

$$4)\ \frac{X-P}{\cos\Theta}=\frac{Y-Q}{\sin\Theta}=\sqrt{(X-P)^2+(Y-Q)^2}$$

oder

$$5)\ Y-Q=(X-P)\,tang\,\Theta$$

folgt.

Weil aber der Punkt (XY) in der Ellipse liegt, so ist nach 1)

$$6)\ \left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1,$$

also nach 5)

$$7)\ \left\{\frac{P+(X-P)}{a}\right\}^2+\left\{\frac{Q+(X-P)\,tang\,\Theta}{b}\right\}^2=1.$$

Nach gehöriger Entwickelung erhält man aus dieser Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2)(X-P)^2 \\ +2(a^2 Q \sin\Theta + b^2 P \cos\Theta \cos\Theta)(X-P)\end{array}\right\} = (a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2)\cos\Theta^2$$

oder

$$(X-P)^2 + 2\frac{a^2 Q \sin\Theta + b^2 P \cos\Theta}{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2}\cos\Theta(X-P)$$

$$= \frac{a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2}{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2}\cos\Theta^2,$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergiebt sich

$$\frac{X-P}{\cos\Theta} = \frac{Y-Q}{\sin\Theta} = -\frac{a^2 Q \sin\Theta + b^2 P \cos\Theta}{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2}$$

$$\pm\frac{\sqrt{(a^2 Q \sin\Theta + b^2 P \cos\Theta)^2 + (a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2)(a^2 b^2 - a^2 Q - b^2 P^2)}}{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2},$$

oder, weil, wie man leicht findet,

$$(a^2 Q \sin\Theta + b^2 P \cos\Theta)^2 + (a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2)(a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2)$$
$$= a^2 b^2\left\{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2\right\}$$

ist:

$$8)\quad \frac{X-P}{\cos\Theta} = \frac{Y-Q}{\sin\Theta}$$

$$= \frac{-(a^2 Q \sin\Theta + b^2 P \cos\Theta) \pm ab\sqrt{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2}}{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2},$$

wo nun zunächst eine genaue Bestimmung nöthig ist, wie man in dieser Gleichung das Zeichen zu nehmen hat, welches eine Unterscheidung der folgenden Fälle erfordert.

I. Wenn der Punkt (PQ) innerhalb der Ellipse liegt, so ist offenbar

$$\left(\frac{P}{a}\right)^2 + \left(\frac{Q}{b}\right)^2 < 1,$$

also

$$a^2 Q^2 + b^2 P^2 < a^2 b^2, \quad a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2 > 0.$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$a^2 b^2\left\{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2\right\}$$
$$= (a^2 Q \sin\Theta + b^2 P \cos\Theta)^2 + (a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2)(a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2)$$

ist, so ist in diesem Falle offenbar

$$\sqrt{a^2 \sin\Theta^2 + b^2 \cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2}$$

jederzeit eine reelle Grösse. Das Product der beiden reellen Grössen

$$-(a^2 Q\sin\Theta + b^2 P\cos\Theta) + ab\sqrt{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2},$$

$$-(a^2 Q\sin\Theta + b^2 P\cos\Theta) - ab\sqrt{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2}$$

ist

$$(a^2 Q\sin\Theta + b^2 P\cos\Theta)^2 - a^2 b^2\{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2\}$$

$$= -(a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2)(a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2),$$

also, weil nach dem Obigen

$$a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2 > 0$$

ist, eine negative Grösse. Folglich haben die beiden in einander multiplicirten Grössen, welche wir der Kürze wegen durch M und N bezeichnen wollen, entgegengesetzte Vorzeichen. Weil nun

$$M - N = 2ab\sqrt{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2}$$

ist, so ist $M - N$ eine positive Grösse, und folglich, weil M und N entgegengesetzte Vorzeichen haben, offenbar M positiv und N negativ. Nach 4) ist nun

$$\frac{X - P}{\cos\Theta} = \frac{Y - Q}{\sin\Theta} = \sqrt{(X-P)^2 + (Y-Q)^2}$$

stets eine positive Grösse. Also muss man in der Gleichung 8) das obere Zeichen nehmen, d. h. man muss

$$9)\quad \frac{X-P}{\cos\Theta} = \frac{Y-Q}{\sin\Theta}$$

$$= \frac{-(a^2 Q\sin\Theta + b^2 P\cos\Theta) + ab\sqrt{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2}$$

oder, wie man leicht findet:

$$10)\quad X =$$

$$a\,\frac{a(P\sin\Theta - Q\cos\Theta)\sin\Theta + b\cos\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2},$$

$$Y =$$

$$-b\,\frac{b(P\sin\Theta - Q\cos\Theta)\cos\Theta - a\sin\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2 - (P\sin\Theta - Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2 + b^2\cos\Theta^2}$$

setzen.

II. Wenn der Punkt (PQ) ausserhalb der Ellipse liegt, so ist offenbar

$$\left(\frac{P}{a}\right)^2 + \left(\frac{Q}{b}\right)^2 > 1,$$

also

$$a^2 Q^2 + b^2 P^2 > a^2 b^2, \quad a^2 b^2 - a^2 Q^2 - b^2 P^2 < 0.$$

In diesem Falle kann die Grösse

$$a^2 b \left\{ a^2 \sin \Theta^2 + b^2 \cos \Theta^2 - (P \sin \Theta - Q \cos \Theta)^2 \right\}$$

$$= (a^2 Q \sin \Theta + b^2 P \cos \Theta)^2 - (a^2 \sin \Theta^2 + b^2 \cos \Theta^2)(a^2 Q^2 + b^2 P^2 - a^2 b^2),$$

und daher auch die Grösse

$$a^2 \sin \Theta^2 + b^2 \cos \Theta^2 - (P \sin \Theta - Q \cos \Theta)^2,$$

weil nach dem Vorhergehenden

$$a^2 Q^2 + b^2 P^2 - a^2 b^2 > 0$$

ist, positiv und negativ sein.

Wenn

$$a^2 \sin \Theta^2 + b^2 \cos \Theta^2 - (P \sin \Theta - Q \cos \Theta)^2 > 0$$

ist, so sind die Coordinaten X, Y reell.

Wenn dagegen

$$a^2 \sin \Theta^2 + b^2 \cos \Theta^2 - (P \sin \Theta - Q \cos \Theta)^2 < 0$$

ist, so sind die Coordinaten X, Y imaginär.

Also entspricht offenbar die Gleichung

$$a^2 \sin \Theta^2 + b^2 \cos \Theta^2 - (P \sin \Theta - Q \cos \Theta)^2 = 0$$

oder

11) $$(a^2 - P^2) \sin \Theta^2 + (b^2 - Q^2) \cos \Theta^2 + 2 PQ \sin \Theta \cos \Theta = 0$$

den von dem Punkte (PQ) an die Ellipse gehenden Berührenden.

Wenn

$$a^2 - P^2 = 0, \quad b^2 - Q^2 = 0$$

ist, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$2 PQ \sin \Theta \cos \Theta = 0,$$

und wird erfüllt

$$\text{durch } \sin \Theta = 0 \text{ und durch } \cos \Theta = 0.$$

Wenn

$$a^2 - P^2 = 0, \text{ nicht } b^2 - Q^2 = 0$$

ist, so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$(b^2 - Q^2) \cos \Theta^2 + 2 PQ \sin \Theta \cos \Theta = 0,$$

und wird erfüllt

durch $(b^2 - Q^2)\cos\Theta + 2PQ\sin\Theta = 0$ und durch $\cos\Theta = 0$, d. i.

$$\text{durch } \cot\Theta = -\frac{2PQ}{b^2 - Q^2} \text{ und durch } \cos\Theta = 0.$$

Wenn

$$\text{nicht } a^2 - P^2 = 0, \quad b^2 - Q^2 = 0$$

ist, so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$(a^2 - P^2)\sin\Theta^2 + 2PQ\sin\Theta\cos\Theta = 0,$$

und wird erfüllt

durch $(a^2 - P^2)\sin\Theta + 2PQ\cos\Theta = 0$ und durch $\sin\Theta = 0$, d. i.

$$\text{durch } tang\,\Theta = -\frac{2PQ}{a^2 - P^2} \text{ und durch } \sin\Theta = 0.$$

Wenn

$$\text{nicht } a^2 - P^2 = 0, \quad \text{nicht } b^2 - Q^2 = 0$$

ist, so ergiebt sich aus unserer obigen Gleichung

$$tang\,\Theta^2 + \frac{2PQ}{a^2 - P^2}\, tang\,\Theta = -\frac{b^2 - Q^2}{a^2 - P^2},$$

also, wie man durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung leicht findet:

$$12) \quad tang\,\Theta = \frac{-PQ \pm \sqrt{P^2Q^2 - (a^2 - P^2)(b^2 - Q^2)}}{a^2 - P^2}$$

oder

$$13) \quad tang\,\Theta = \frac{-PQ \pm \sqrt{a^2Q^2 + b^2P^2 - a^2b^2}}{a^2 - P^2},$$

welches wegen der gemachten Voraussetzung immer eine reelle Grösse ist.

Wenn Q positiv ist, muss man, wie sogleich aus einer leicht zu construirenden Figur erhellet, Θ immer zwischen 180° und 360° nehmen. Wenn dagegen Q negativ ist, so erhellet eben so unmittelbar aus einer leicht zu construirenden Figur, dass man Θ immer zwischen 0 und 180° nehmen muss.

Nach 8) haben wir nun die folgenden Ausdrücke:

14) $$X =$$

$$a\,\frac{a(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)\sin\Theta \pm b\cos\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2},$$

$$Y =$$

$$-b\,\frac{b(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)\cos\Theta \mp a\sin\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$X' =$$

$$a\,\frac{a(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)\sin\Theta + b\cos\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2},$$

$$X'' =$$

$$a\,\frac{a(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)\sin\Theta - b\cos\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2}$$

und

$$Y' =$$

$$-b\,\frac{b(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)\cos\Theta - a\sin\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2},$$

$$Y'' =$$

$$-b\,\frac{b(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)\cos\Theta + a\sin\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2};$$

so ist

$$X = \begin{cases} X' \\ X'', \end{cases} \quad Y = \begin{cases} Y' \\ Y''. \end{cases}$$

Durch Subtraction findet man leicht

$$Y' - Y'' = \frac{2ab\sin\Theta\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}}{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2}.$$

Nehmen wir nun immer an, dass

$$\sqrt{a^2\sin\Theta^2+b^2\cos\Theta^2-(P\sin\Theta-Q\cos\Theta)^2}$$

eine reelle Grösse ist, so ist nach dem Obigen, wenn Q positiv ist,

$$180° < \Theta < 360°$$

also $\sin\Theta$ negativ, und folglich

$$Y' - Y'' < 0, \text{ also } Y' < Y''.$$

Wenn dagegen Q negativ ist, so ist

$$0 < \Theta < 180°,$$

also *sin* Θ positiv, und folglich

$$Y' - Y'' > 0, \text{ also } Y' > Y''.$$

Hieraus ergiebt sich durch eine leichte Betrachtung auf der Stelle, dass man für den Durchschnittspunkt der von dem Punkte (PQ) ausgehenden geraden Linie mit der Ellipse, welcher am weitesten von dem Punkte (PQ) entfernt ist, in den Formeln 14) immer die obern, für den anderen Durchschnittspunkt in diesen Formeln immer die untern Zeichen nehmen muss.

Bemerkt mag hier noch werden, dass man mittelst des Vorhergehenden auch leicht die Gleichung der durch den beliebigen Punkt (XY) in der Ellipse gehenden Berührenden derselben entwickeln kann. Die Gleichung dieser Berührenden sei nämlich

$$y - Y = A(x - X).$$

Ist nun (PQ) ein beliebiger Punkt in derselben, so ist

$$Q - Y = A(P - X).$$

Behält aber Θ seine frühere Bedeutung, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich

$$A = tang\ \Theta,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$Q - Y = (P - X)\ tang\ \Theta,$$

und folglich nach 12)

$$(a^2 - P^2)(Q - Y)$$

$$= -\left\{ P\,Q \mp \sqrt{P^2\,Q^2 - (a^2 - P^2)(b^2 - Q^2)} \right\} (P - X)$$

oder

$$\pm (P - X)\sqrt{P^2\,Q^2 - (a^2 - P^2)(b^2 - Q^2)}$$

$$= P\,Q\,(P - X) + (a^2 - P^2)(Q - Y).$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung, so ergiebt sich

$$(a^2 - P^2)(Q - Y)^2 + (b^2 - Q^2)(P - X)^2 = -2\,P\,Q\,(P - X)(Q - Y),$$

also

$$a^2(Q-Y)^2+b^2(P-X)^2$$
$$=P^2(Q-Y)^2+Q^2(P-X)^2-2PQ(P-X)(Q-Y)$$
$$-\left\{P(Q-Y)-Q(P-X)\right\}^2$$
$$=(XQ-YP)^2$$
$$=\left\{X(Q-Y)-Y(P-X)\right\}^2$$
$$=X^2(Q-Y)^2+Y^2(P-X)^2-2XY(P-X)(Q-Y),$$

und folglich

$$(a^2-X^2)(Q-Y)^2+(b^2-Y^2)(P-X)^2+2XY(P-X)(Q-Y)=0.$$

Wegen der Gleichung der Ellipse ist nun

$$a^2-X^2=\frac{a^2}{b^2}Y^2,\ b^2-Y^2=\frac{b^2}{a^2}X^2;$$

also

$$\frac{a^2}{b^2}Y^2(Q-Y)^2+\frac{b^2}{a^2}X^2(P-X)^2+2XY(P-X)(Q-Y)=0$$

oder

$$a^4Y^2(Q-Y)^2+b^4X^2(P-X)^2+2a^2b^2XY(P-X)(Q-Y)=0,$$

d. i.

$$\left\{a^2Y(Q-Y)+b^2X(P-X)\right\}^2=0$$

oder

$$a^2Y(Q-Y)+b^2X(P-X)=0,$$

also

$$Q-Y=-\frac{b^2X}{a^2Y}(P-X).$$

Da man nun aber für P, Q, welches die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der durch den Punkt $(X\ Y)$ in der Ellipse gehenden Berührenden derselben sind, offenbar x, y schreiben kann, so ist

$$15)\quad y-Y=-\frac{b^2X}{a^2Y}(x-X)$$

die gesuchte Gleichung dieser Berührenden, und folglich, wie sich leicht aus den bekannten Principien der analytischen Geometrie ergiebt,

$$16)\quad y-Y=\frac{a^2Y}{b^2X}(x-X)$$

die Gleichung der dem Punkte $(X\,Y)$ entsprechenden Normale der Ellipse.

Nach dieser vorläufigen Untersuchung über die Durchschnittspunkte gerader Linien mit der Ellipse wollen wir nun zu der Betrachtung der Reflexion bei diesem Kegelschnitte selbst übergehen.

II.

Wir wollen daher jetzt annehmen, dass die Ellipse von einem von dem Punkte $(P\,Q)$ ausgehenden Strahle in dem Punkte $(X\,Y)$ getroffen werde. Denken wir uns diesen Strahl von dem Punkte $(X\,Y)$ ausgehend, und bezeichnen den von ihm mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt (XY) gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, von dem in Rede stehenden Theile der ersten Axe dieses Systems an durch dessen Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch φ; so ist, weil nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$P - X, \quad Q - Y$$

die Coordinaten des Punktes $(P\,Q)$ in Bezug auf das durch den Punkt $(X\,Y)$ gelegte, dem primitiven Systeme parallele System sind, offenbar:

$$17) \quad \begin{cases} P-X = \cos\varphi \sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}, \\ Q-Y = \sin\varphi \sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}; \end{cases}$$

also

$$18) \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{P-X}{\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{Q-Y}{\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den von der als aus dem Punkte $(X\,Y)$ ausgehend gedachten Normale der Ellipse, deren Gleichung nach 16)

$$19) \quad y - Y = \frac{a^2\,Y}{b^2\,X}(x - X)$$

ist, mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt $(X\,Y)$ gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems

eingeschlossenen, von dem in Rede stehenden Theile der ersten Axe dieses Systems an durch dessen Cordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch φ', so ist bekanntlich

$$20)\quad tang\,\varphi' = \frac{a^2 Y}{b^2 X}.$$

Also ist

$$cos\,\varphi'^2 = \frac{1}{1 + tang\,\varphi'^2} = \frac{b^4 X^2}{a^4 Y^2 + b^4 X^2},$$

und folglich

$$cos\,\varphi' = \pm \frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}.$$

Weil nun nach 20)

$$sin\,\varphi' = tang\,\varphi'\, cos\,\varphi' = \frac{a^2 Y}{b^2 X}\, cos\,\varphi'$$

ist, so ist

$$sin\,\varphi' = \pm \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}},$$

und wir haben daher die beiden folgenden Gleichungen, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$21)\quad \begin{cases} cos\,\varphi' = \pm \dfrac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}, \\ sin\,\varphi' = \pm \dfrac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}. \end{cases}$$

Ist φ_1 der von dem aus dem Punkte (XY) ausgehenden reflectirten Strahle mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt (XY) gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossene, auf dieselbe Weise wie vorher genommene Winkel, so liefert uns das Grundgesetz der Katoptrik nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie die folgende allgemein gültige Gleichung:

$$cos\,\varphi\, cos\,\varphi' + sin\,\varphi\, sin\,\varphi' = cos\,\varphi'\, cos\,\varphi_1 + sin\,\varphi'\, sin\,\varphi_1,$$

d. i. nach 18) und 21) die Gleichung

$$22)\quad \frac{b^2 X(P-X) + a^2 Y(Q-Y)}{\sqrt{(P-X)^2 + (Q-Y)^2}} = b^2 X\, cos\,\varphi_1 + a^2 Y\, sin\,\varphi_1,$$

wozu noch die Gleichung

$$23) \quad \cos\varphi_1^2 + \sin\varphi_1^2 = 1$$

kommt. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\sin\varphi_1$, so erhält man nach leichter Rechnung die Gleichung

$$\cos\varphi_1^2 - \frac{2b^2X\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}}{(a^4Y^2+b^4X^2)\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}}\cos\varphi_1$$

$$= \frac{a^4Y^2\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\} - \left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}^2}{(a^4Y^2+b^4X^2)\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\}},$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergiebt sich:

$$24) \quad \cos\varphi_1 =$$

$$\frac{b^2X\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\} \pm a^2Y\left\{a^2Y(P-X)-b^2X(Q-Y)\right\}}{(a^4Y^2+b^4X^2)\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}}.$$

Weil ferner nach 22)

$$\sin\varphi_1 = -\frac{b^2X}{a^2Y}\cos\varphi_1 + \frac{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)}{a^2Y\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}}$$

ist, so erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$25) \quad \sin\varphi_1$$

$$= \frac{a^2Y\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\} \mp b^2X\left\{a^2Y(P-X)-b^2X(Q-Y)\right\}}{(a^4Y^2+b^4X^2)\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}}.$$

Wollte man in den Formeln 24) und 25) die obern Zeichen nehmen, so würde man

$$\cos\varphi_1 = \frac{P-X}{\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{Q-Y}{\sqrt{(P-X)^2+(Q-Y)^2}};$$

also nach 18)

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi, \quad \sin\varphi_1 = \sin\varphi;$$

folglich $\varphi_1 = \varphi$ erhalten, und der reflectirte Strahl würde also mit dem einfallenden Strahle zusammenfallen, was wenigstens im Allgemeinen ungereimt ist. Daher muss man in den Formeln 24) und 25) die untern Zeichen nehmen, d. h. es ist

$$26)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{(b^4X^2 - a^4Y^2)(P-X) + 2a^2b^2XY(Q-Y)}{(a^4Y^2 + b^4X^2)\sqrt{(P-X)^2 + (Q-Y)^2}}, \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{(a^4Y^2 - b^4X^2)(Q-Y) + 2a^2b^2XY(P-X)}{(a^4Y^2 + b^4X^2)\sqrt{(P-X)^2 + (Q-Y)^2}}; \end{cases}$$

und folglich

$$27)\quad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{2a^2b^2XY(P-X) + (a^4Y^2 - b^4X^2)(Q-Y)}{2a^2b^2XY(Q-Y) - (a^4Y^2 - b^4X^2)(P-X)}.$$

Führt man den Winkel Θ ein, so erhält man nach 2)

$$28)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{(a^4Y^2 - b^4X^2)\cos\Theta - 2a^2b^2XY\sin\Theta}{a^4Y^2 + b^4X^2}, \\ \sin\varphi_1 = -\dfrac{(a^4Y^2 - b^4X^2)\sin\Theta + 2a^2b^2XY\cos\Theta}{a^4Y^2 + b^4X^2}; \end{cases}$$

oder

$$29)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a^4Y^2 - b^4X^2}{a^4Y^2 + b^4X^2}\cos\Theta - \dfrac{2a^2b^2XY}{a^4Y^2 + b^4X^2}\sin\Theta, \\ \sin\varphi_1 = -\dfrac{a^4Y^2 - b^4X^2}{a^4Y^2 + b^4X^2}\sin\Theta - \dfrac{2a^2b^2XY}{a^4Y^2 + b^4X^2}\cos\Theta; \end{cases}$$

also

$$30)\quad \operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{(a^4Y^2 - b^4X^2)\sin\Theta + 2a^2b^2XY\cos\Theta}{(a^4Y^2 - b^4X^2)\cos\Theta - 2a^2b^2XY\sin\Theta}.$$

Setzt man

$$31)\quad \operatorname{tang}\omega = \frac{2a^2b^2XY}{a^4Y^2 - b^4X^4},$$

so wird

$$32)\quad \operatorname{tang}\varphi_1 = -\operatorname{tang}(\Theta + \omega).$$

Auch findet man leicht die folgenden Ausdrücke:

$$33)\quad \begin{cases} \cos(\Theta + \varphi_1) = \dfrac{a^4Y^2 - b^4X^2}{a^4Y^2 + b^4X^2}, \\ \sin(\Theta + \varphi_1) = -\dfrac{2a^2b^2XY}{a^4Y^2 + b^4X^2}, \\ \operatorname{tang}(\Theta + \varphi_1) = -\dfrac{2a^2b^2XY}{a^4Y^2 - b^4X^2}; \end{cases}$$

und

$$34)\quad \begin{cases} cos\,(\Theta-\varphi_1) = \dfrac{a^4Y^2-b^4X^2}{a^4Y^2+b^4X^2}\,cos\,2\Theta - \dfrac{2a^2b^2XY}{a^4Y^2+b^4X^2}\,sin2\Theta, \\ sin\,(\Theta-\varphi_1) = \dfrac{a^4Y^2-b^4X^2}{a^4Y^2+b^4X^2}\,sin\,2\Theta + \dfrac{2a^2b^2XY}{a^4Y^2+b^4X^2}\,cos2\Theta, \\ tang\,(\Theta-\varphi_1) = \dfrac{(a^4Y^2-b^4X^2)\,sin\,2\Theta + 2a^2b^2XY\,cos\,2\Theta}{(a^4Y^2-b^4X^2)\,cos\,2\Theta - 2a^2b^2XY\,sin\,2\Theta}. \end{cases}$$

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der reflectirte Strahl liegt, ist

$$35)\quad y-Y = \frac{2a^2b^2XY(P-X)+(a^4Y^2-b^4X^2)(Q-Y)}{2a^2b^2XY(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4X^2)(P-X)}(x-X),$$

oder

$$36)\quad y-Y = \frac{2a^2b^2XY\,cos\,\Theta+(a^4Y^2-b^4X^2)\,sin\,\Theta}{2a^2b^2XY\,sin\,\Theta-(a^4Y^2-b^4X^2)\,cos\,\Theta}(x-X),$$

oder, wenn ω seine obige Bedeutung behält:

$$36^*)\quad y-Y = -(x-X)\,tang\,(\Theta+\omega).$$

Bezeichnen wir die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der Axe der x durch P_1, die zweite Coordinate ihres Durchschnittspunkts mit der Axe der y durch Q_1; so erhalten wir aus 35) leicht:

$$37)\quad \begin{cases} P_1 = X - \dfrac{2a^2b^2XY(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4X^2)(P-X)}{2a^2b^2XY(P-X)+(a^4Y^2-b^4X^2)(Q-Y)}Y, \\ Q_1 = Y - \dfrac{2a^2b^2XY(P-X)+(a^4Y^2-b^4X^2)(Q-Y)}{2a^2b^2XY(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4X^2)(P-X)}X; \end{cases}$$

und hieraus ferner:

$$38)\quad P_1 =$$

$$\frac{2a^2b^2XY\{X(P-X)-Y(Q-Y)\}+(a^4Y^2-b^4X^2)\{X(Q-Y)+Y(P-X)\}}{2a^2b^2XY(P-X)+(a^4Y^2-b^4X^2)(Q-Y)},$$

$$Q_1 =$$

$$-\frac{2a^2b^2XY\{X(P-X)-Y(Q-Y)\}+(a^4Y^2-b^4X^2)\{X(Q-Y)+Y(P-X)\}}{2a^2b^2XY(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4X^2)(P-X)};$$

welche zwei Gleichungen man auch auf die Form

$$Y\frac{P-X}{Q-Y}=-\frac{2a^2b^2XY^2+(a^4Y^2-b^4X^2)(P_1-X)}{2a^2b^2X(P_1-X)-(a^4Y^2-b^4X^2)},$$

$$X\frac{Q-Y}{P-X}=-\frac{2a^2b^2X^2Y-(a^4Y^2-b^4X^2)(Q_1-Y)}{2a^2b^2Y(Q_1-Y)+(a^4Y^2-b^4X^2)};$$

oder auf die Form

$$\left\{2a^2b^2X((P-X)(P_1-X)-Y^2)-(a^4Y^2-b^4X^2)((P-X)+(P_1-X))\right\}Y$$
$$=-\left\{2a^2b^2XY^2+(a^4Y^2-b^4X^2)(P_1-X)\right\}Q,$$

$$\left\{2a^2b^2Y((Q-Y)(Q_1-Y)-X^2)+(a^4Y^2-b^4X^2)((Q-Y)+(Q_1-Y))\right\}X$$
$$=-\left\{2a^2b^2X^2Y-(a^4Y^2-b^4X^2)(Q_1-Y)\right\}P$$

bringen kann.

Für $Q=0$ wird die erste dieser beiden Gleichungen:

$$2a^2b^2X\left\{(P-X)(P_1-X)-Y^2\right\}-(a^4Y^2-b^4X^2)\left\{(P-X)+(P_1-X)\right\}=0.$$

Diese Gleichung bringt man leicht auf die Form:

$$2a^2b^2XPP_1-(2a^2b^2X^2+a^4Y^2-b^4X^2)(P+P_1)$$
$$=-2(a^2-b^2)(a^2Y^2+b^2X^2)X,$$

d. i., weil

$$2a^2b^2X^2+a^4Y^2-b^4X^2=b^2\left\{a^4+(a^2-b^2)X^2\right\}$$

$$a^2Y^2+b^2X^2=a^2b^2$$

ist, auf die Form:

$$2a^2XPP_1-(a^4+e^2X^2)(P+P_1)=-2a^2e^2X,$$

wo e seine bekannte Bedeutung hat, und erhält hieraus sogleich:

$$P_1=\frac{2a^2e^2X-(a^4+e^2X^2)P}{a^4+e^2X^2-2a^2XP}.$$

Für $P=0$ wird

$$P_1=\frac{2a^2e^2X}{a^4+e^2X^2}=\frac{2X}{\left(\frac{a}{e}\right)+\left(\frac{X}{a}\right)^2}.$$

Für $P=e$ wird, wie man leicht findet, $P_1=-e$, d. i. eine constante, von X unabhängige Grösse, worin die bekannte Eigenschaft der Brennpunkte der Ellipse enthalten ist.

III.

Wir wollen jetzt annehmen, dass zwei von dem Punkte *(PQ)* ausgehende Strahlen die Ellipse in den beiden Punkten (XY) und $(X_1\,Y_1)$ treffen. Dann sind nach 35)

$$39)\begin{cases} y-Y=\dfrac{2a^2b^2XY(P-X)+(a^4Y^2-b^4X^2)(Q-Y)}{2a^2b^2XY(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4X^2)(P-X)}(x-X), \\ y-Y_1=\dfrac{2a^2b^2X_1Y_1(P-X_1)+(a^4Y_1^2-b^4X_1^2)(Q-Y_1)}{2a^2b^2X_1Y_1(Q-Y_1)-(a^4Y_1^2-b^4X_1^2)(P-X_1)}(x-X_1) \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden geraden Linien, in denen die entsprechenden reflectirten Strahlen liegen; und wenn man also aus diesen beiden Gleichungen die Grössen x, y mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination bestimmt, so erhält man die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden geraden Linien, in denen die entsprechenden reflectirten Strahlen liegen.

Wenn man nun, indem man X, Y als constant betrachtet, diesen Coordinaten sich die Coordinaten X_1, Y_1 bis zu jedem beliebigen Grade nähern lässt, und dann die Coordinaten x, y sich zwei völlig bestimmten Gränzen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ bis zu jedem beliebigen Grade nähern, so soll der durch die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ bestimmte Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ das dem Punkte *(XY)* der Ellipse entsprechende Bild des Punktes *(PQ)* genannt werden.

Um zu untersuchen, ob es nach diesem Begriffe ein dem Punkte *(XY)* der Ellipse entsprechendes Bild des Punktes *(PQ)* giebt, und zugleich, wenn dies der Fall ist, dessen Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ zu bestimmen, wollen wir der Kürze wegen

$$40)\begin{cases} V=2a^2b^2XY(P-X)+(a^4Y^2-b^4X^2)(Q-Y), \\ W=2a^2b^2XY(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4X^2)(P-X) \end{cases}$$

und

$$41)\begin{cases} V_1=2a^2b^2X_1Y_1(P-X_1)+(a^4Y_1^2-b^4X_1^2)(Q-Y_1), \\ W_1=2a^2b^2X_1Y_1(Q-Y_1)-(a^4Y_1^2-b^4X_1^2)(P-X_1) \end{cases}$$

setzen. Dann haben wir zur Bestimmung der Coordinaten x, y die Gleichungen:

$$42)\quad \begin{cases} y - Y = \dfrac{V}{W}(x - X), \\ y - Y_1 = \dfrac{V_1}{W_1}(x - X_1). \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen y, so erhält man

$$43)\quad \frac{x-X}{W} = \frac{V_1(X-X_1) - W_1(Y-Y_1)}{VW_1 - WV_1}.$$

Weil bekanntlich

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2),\quad Y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X_1^2)$$

ist, und man X_1 sich dem X nähern lässt, so ist für $X = X_1$ natürlich auch $Y = Y_1$ und $V = V_1$, $W = W_1$, woraus sich ergiebt, dass für $X = X_1$ Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{V_1(X-X_1) - W_1(Y-Y_1)}{VW_1 - WV_1}$$

verschwinden. Entwickelt man nun die Differentialquotienten von

$$V_1(X-X_1) - W_1(Y-Y_1) \text{ und } VW_1 - WV_1$$

in Bezug auf X_1 als veränderliche Grösse, wobei X, und also auch Y, als constant betrachtet wird, und bezeichnet die Werthe, welche dieselben erhalten, wenn man $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ setzt, durch Ω und Ω_1; so ist, wenn die Grössen Ω und Ω_1 nicht beide zugleich verschwinden, nach den Principien der Differentialrechnung der Bruch

$$\frac{\Omega}{\Omega_1}$$

die Gränze, welcher der Bruch

$$\frac{V_1(X-X_1) - W_1(Y-Y_1)}{VW_1 - WV_1}$$

sich nähert, wenn man X_1 sich dem X, also Y_1 sich dem Y nähern lässt, und folglich nach dem Obigen offenbar

$$\frac{\mathfrak{X} - X}{W} = \frac{\Omega}{\Omega_1},$$

mittelst welcher Gleichung $\mathfrak{X}$ leicht bestimmt werden kann. Daher wird es jetzt zunächst auf die Entwickelung der Grössen Ω und Ω_1 ankommen.

Mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = -\frac{b^2 X_1}{a^2 Y_1}$$

ist, erhält man nach leichter Rechnung:

$$\frac{\partial V_1}{\partial X_1} = \frac{2b^2(a^2 Y_1^2 - b^2 X_1^2)}{Y_1}(P - X_1)$$
$$- 2b^2(a^2 + b^2) X_1 (Q - Y_1)$$
$$- \frac{b^2(a^4 Y_1^2 + b^4 X_1^2) X_1}{a^2 Y_1}$$

und

$$\frac{\partial W_1}{\partial X_1} = 2b^2(a^2 + b^2) X_1 (P - X_1)$$
$$+ \frac{2b^2(a^2 Y_1^2 - b^2 X_1^2)}{Y_1}(Q - Y_1)$$
$$+ a^4 Y_1^2 + b^4 X_1^2;$$

und weil nun

$$\frac{\partial \{V_1(X - X_1) - W_1(Y - Y_1)\}}{\partial X_1}$$
$$= (X - X_1)\frac{\partial V_1}{\partial X_1} - (Y - Y_1)\frac{\partial W_1}{\partial X_1} - V_1 + W_1 \frac{\partial Y_1}{\partial X_1}$$

und

$$\frac{\partial (V W_1 - W V_1)}{\partial X_1} = V \frac{\partial W_1}{\partial X_1} - W \frac{\partial V_1}{\partial X_1}$$

ist, so ist, wie man ebenfalls nach leichter Rechnung mit Hülfe einiger sich von selbst ergebenden Reductionen findet:

$$\Omega = -(a^4 Y^2 + b^4 X^2) \cdot \frac{b^2 X(P - X) + a^2 Y(Q - Y)}{a^2 Y}$$

und

$$\Omega_1 = (a^4 Y^2 + b^4 X^2)^2 \cdot \frac{b^2 X(P - X) + a^2 Y(Q - Y)}{a^2 Y}$$
$$+ \frac{2a^2 b^4 (a^4 Y^2 + b^4 X^2)}{Y}\{(P - X)^2 + (Q - Y)^2\}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\mathfrak{x}-X}{W}=$$

$$-\frac{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)}{(a^4Y^2+b^4X^2)\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}+2a^4b^4\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\}};$$

und weil nun wegen der Gleichung

$$y-Y=\frac{V}{W}(x-X)$$

offenbar

$$\frac{\mathfrak{x}-X}{W}=\frac{\mathfrak{y}-Y}{V}$$

ist, so ist auch

$$\frac{\mathfrak{y}-Y}{V}=$$

$$-\frac{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)}{(a^4Y^2+b^4X^2)\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}+2a^4b^4\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\}}.$$

Also ist

$$44)\quad \mathfrak{x}-X=$$

$$-\frac{\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}\left\{2a^2b^2XY(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4X^2)(P-X)\right\}}{(a^4Y^2+b^4X^2)\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}+2a^4b^4\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\}},$$

$$\mathfrak{y}-Y=$$

$$-\frac{\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}\left\{2a^2b^2XY(P-X)+(a^4Y^2-b^4X^2)(Q-Y)\right\}}{(a^4Y^2+b^4X^2)\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}+2a^4b^4\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\}};$$

durch welche ganz allgemeinen Formeln die Lage des dem Punkte $(X\,Y)$ der Ellipse entsprechenden Bildes des Punktes $(P\,Q)$ vollkommen bestimmt ist.

Auch erhält man, wenn E die Entfernung der Punkte $(X\,Y)$ und $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ von einander bezeichnet, aus diesen Formeln leicht:

$$45)\quad E^2=$$

$$\frac{(a^4Y^2+b^4X^2)^2\left\{b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}^2\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\}}{\left\{(a^4Y^2+b^4X^2)(b^2X(P-X)+a^2Y(Q-Y))+2a^4b^4((P-X)^2+(Q-Y)^2)\right\}^2}.$$

Wenn wir den durch die Coordinaten $-a$, 0 bestimmten Scheitel der Hauptaxe als Anfang der Coordinaten annehmen, so müssen wir in den vorhergehenden Formeln für

$$P,\ Q;\quad X,\ Y;\quad \mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}$$

respective

$$P-a,\ Q;\quad X-a,\ Y;\quad \mathfrak{X}-a,\ \mathfrak{Y}$$

setzen. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$Z = \left\{b^2(X-a)(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}$$
$$\times\left\{2a^2b^2(X-a)Y(Q-Y)-(a^4Y^2-b^4(X-a)^2)(P-X)\right\},$$
$$Z_1 = \left\{b^2(X-a)(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}$$
$$\times\left\{2a^2b^2(X-a)Y(P-X)+(a^4Y^2-b^4(X-a)^2)(Q-Y)\right\},$$
$$N = \left\{a^4Y^2+b^4(X-a)^2\right\}\left\{b^2(X-a)(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}$$
$$+2a^4b^4\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\};$$

oder, wenn der Parameter der Ellipse wie gewöhnlich durch p bezeichnet, also

$$p=\frac{2b^2}{a},\quad b^2=\tfrac{1}{2}ap,\quad b^4=\tfrac{1}{4}a^2p^2$$

gesetzt wird:

$$Z = \left\{\tfrac{1}{2}ap(X-a)(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}$$
$$\times\left\{a^3p(X-a)Y(Q-Y)-(a^4Y^2-\tfrac{1}{4}a^2p^2(X-a)^2)(P-X)\right\},$$
$$Z_1 = \left\{\tfrac{1}{2}ap(X-a)(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}$$
$$\times\left\{a^3p(X-a)Y(P-X)+(a^4Y^2-\tfrac{1}{4}a^2p^2(X-a)^2)(Q-Y)\right\},$$
$$N = \left\{a^4Y^2+\tfrac{1}{4}a^2p^2(X-a)^2\right\}\left\{\tfrac{1}{2}ap(X-a)(P-X)+a^2Y(Q-Y)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}a^6p^2\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\};$$

so ist nach 44):

$$46)\quad \mathfrak{X}-X=-\frac{Z}{N},\ \mathfrak{Y}-Y=-\frac{Z_1}{N}.$$

Dividiren wir aber die Grössen Z, Z_1, N sämmtlich durch a^6, und setzen der Kürze wegen

$$Z' = \left\{\tfrac{1}{2}p\left(\frac{X}{a}-1\right)(P-X)+Y(Q-Y)\right\}$$

$$\times\left\{p\left(\frac{X}{a}-1\right)Y(Q-Y)-\left(Y^2-\tfrac{1}{4}p^2\left(\frac{X}{a}-1\right)^2\right)(P-X)\right\},$$

$$Z'_1 = \left\{\tfrac{1}{2}p\left(\frac{X}{a}-1\right)(P-X)+Y(Q-Y)\right\}$$

$$\times\left\{p\left(\frac{X}{a}-1\right)Y(P-X)+\left(Y^2-\tfrac{1}{4}p^2\left(\frac{X}{a}-1\right)^2\right)(Q-Y)\right\},$$

$$N' = \left\{Y^2+\tfrac{1}{4}p^2\left(\frac{X}{a}-1\right)^2\right\}\left\{\tfrac{1}{2}p\left(\frac{X}{a}-1\right)(P-X)+Y(Q-Y)\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}p^2\left\{(P-X)^2+(Q-Y)^2\right\};$$

so ist auch

$$47)\quad \mathfrak{X}-X = -\frac{Z'}{N'},\quad \mathfrak{Y}-Y = -\frac{Z'_1}{N'}.$$

Lassen wir nun in diesen Formeln a unendlich werden, so erhalten wir den Fall der Parabel, und für diesen Kegelschnitt werden also die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ des dem Punkte $(X\,Y)$ desselben entsprechenden Bildes des Punktes $(P\,Q)$ durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$48)\quad \mathfrak{X}-X =$$

$$-\frac{\left\{\tfrac{1}{2}p(X-P)-Y(Y-Q)\right\}\left\{pY(Y-Q)+(Y^2-\tfrac{1}{4}p^2)(X-P)\right\}}{(Y^2+\tfrac{1}{4}p^2)\left\{\tfrac{1}{2}p(X-P)-Y(Y-Q)\right\}+\tfrac{1}{2}p^2\left\{(X-P)^2+(Y-Q)^2\right\}},$$

$$\mathfrak{Y}-Y =$$

$$-\frac{\left\{\tfrac{1}{2}p(X-P)-Y(Y-Q)\right\}\left\{pY(X-P)-(Y^2-\tfrac{1}{4}p^2)(Y-Q)\right\}}{(Y^2+\tfrac{1}{4}p^2)\left\{\tfrac{1}{2}p(X-P)-Y(Y-Q)\right\}+\tfrac{1}{2}p^2\left\{(X-P)^2+(Y-Q)^2\right\}};$$

wobei das Coordinatensystem auf die in der Theorie der Parabel gewöhnliche Weise angenommen, also als Gleichung derselben die Gleichung $y^2 = p\,x$ zum Grunde gelegt worden ist, wie sich nach dem Obigen von selbst versteht.

Wir wollen jetzt den Fall besonders betrachten, wenn der

strahlende Punkt (PQ) in der dem Punkte (XY) der Ellipse entsprechenden Normale derselben liegt.

Weil nach 16) bekanntlich

$$y - Y = \frac{a^2 Y}{b^2 X}(x - X)$$

die Gleichung der dem Punkte (XY) der Ellipse entsprechenden Normale derselben ist, so haben wir unter der gemachten Voraussetzung die Gleichungen:

$$49)\quad \begin{cases} Q - Y = \dfrac{a^2 Y}{b^2 X}(P - X), \\ P - X = \dfrac{b^2 X}{a^2 Y}(Q - Y); \end{cases}$$

und führen wir nun den Werth von $Q - Y$ aus der ersten dieser beiden Gleichungen in die erste der beiden Gleichungen 44), den Werth von $P - X$ aus der zweiten der beiden vorstehenden Gleichungen in die zweite der beiden Gleichungen 44) ein, so erhalten wir nach einigen leichten Verwandlungen:

$$50)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} - X = -\dfrac{X(a^4 Y^2 + b^4 X^2)(P - X)}{X(a^4 Y^2 + b^4 X^2) + 2a^4 b^2 (P - X)}, \\ \mathfrak{y} - Y = -\dfrac{Y(a^4 Y^2 + b^4 X^2)(Q - Y)}{Y(a^4 Y^2 + b^4 X^2) + 2a^2 b^4 (Q - Y)}. \end{cases}$$

Weil aber wegen der Gleichung der Ellipse

$$a^4 Y^2 + b^4 X^2 = b^2 (a^4 - e^2 X^2) = a^2 (b^4 + e^2 Y^2)$$

ist, so ist, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$51)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} - X = -\dfrac{X(a^4 - e^2 X^2)(P - X)}{X(a^4 - e^2 X^2) + 2a^4 (P - X)}, \\ \mathfrak{y} - Y = -\dfrac{Y(b^4 + e^2 Y^2)(Q - Y)}{Y(b^4 + e^2 Y^2) + 2b^4 (Q - Y)}; \end{cases}$$

also

$$52)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = -\dfrac{2e^2 X^3 - (a^4 + e^2 X^2) P}{2a^4 P - (a^4 + e^2 X^2) X} X, \\ \mathfrak{y} = \dfrac{2e^2 Y^3 + (b^4 - e^2 Y^2) Q}{2b^4 Q - (b^4 - e^2 Y^2) Y} Y. \end{cases}$$

Auch findet man leicht die folgenden Ausdrücke:

$$53)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} - X = -\dfrac{b^2 X Y (a^4 - e^2 X^2)(P - X)}{a^4 Y^3 P + b^4 X^3 Q + a^4 b^2 Y (P - X)}, \\ \mathfrak{y} - Y = -\dfrac{b^2 X Y (a^4 - e^2 X^2)(Q - Y)}{a^4 Y^3 P + b^4 X^3 Q + a^2 b^4 X (Q - Y)}; \end{cases}$$

und

$$54)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{a^4 Y^3 P + b^4 X^3 Q + b^2 e^2 X^2 Y (P - X)}{a^4 Y^3 P + b^4 X^3 Q + a^4 b^2 Y (P - X)} X, \\ \mathfrak{y} = \dfrac{a^4 Y^3 P + b^4 X^3 Q - a^2 e^2 X Y^2 (Q - Y)}{a^4 Y^3 P + b^4 X^3 Q + a^2 b^4 X (Q - Y)} Y. \end{cases}$$

Für den Kreis ist nach 52)

$$55)\quad \mathfrak{x} = \frac{P X}{2P - X}, \quad \mathfrak{y} = \frac{Q Y}{2Q - Y}$$

oder

$$56)\quad \mathfrak{x} = \frac{X}{2 - \dfrac{X}{P}}, \quad \mathfrak{y} = \frac{Y}{2 - \dfrac{Y}{Q}}.$$

Setzen wir, was hier offenbar verstattet ist, wenn a den Halbmesser des Kreises bezeichnet, $X = \pm a$, $Y = 0$; so ist

$$57)\quad \mathfrak{x} = \pm \frac{a P}{2P \mp a} = \pm \frac{a}{2 \mp \dfrac{a}{P}}, \quad \mathfrak{y} = 0.$$

Wenn P sich dem Unendlichen nähert, so nähert sich $\mathfrak{x}$ der Gränze $\pm \frac{1}{2} a$.

Wenn der Punkt (PQ) in der Hauptaxe der Ellipse liegt, so ist im Vorhergehenden offenbar $X = \pm a$, $Y = 0$ zu setzen, und aus der ersten der beiden Gleichungen 52) ergiebt sich leicht:

$$58)\quad \mathfrak{x} = \pm \frac{2 a e^2 \mp (a^2 + e^2) P}{a^2 + e^2 \mp 2 a P}.$$

Auch liegt es in der Natur der Sache, dass in diesem Falle $\mathfrak{y} = 0$ ist. Bringt man die Gleichung 58) auf die Form

$$\mathfrak{x} = \pm \frac{\dfrac{2 a e^2}{P} \mp (a^2 + e^2)}{\dfrac{a^2 + e^2}{P} \mp 2a},$$

und bezeichnet die Gränze, welcher $\mathfrak{x}$ sich nähert, wenn P sich dem Unendlichen nähert, durch $\mathfrak{x}'$; so ergiebt sich auf der Stelle, dass

$$59)\quad \mathfrak{x}' = \pm \frac{a^2 + e^2}{2a}$$

ist.

Wenn der Punkt (PQ) in der Nebenaxe der Ellipse liegt, so ist im Vorhergehenden offenbar $X = 0$, $Y = \pm b$ zu setzen, und aus der zweiten der beiden Gleichungen 52) ergiebt sich leicht:

$$60)\quad \mathfrak{y} = \mp \frac{2be^2 \pm (b^2 - e^2)\, Q}{b^2 - e^2 \mp 2b\, Q}.$$

Auch liegt es in der Natur der Sache, dass in diesem Falle $\mathfrak{x} = 0$ ist. Bringt man die Gleichung 60) auf die Form

$$\mathfrak{y} = \mp \frac{\frac{2be^2}{Q} \pm (b^2 - e^2)}{\frac{b^2 - e^2}{Q} \mp 2b},$$

und bezeichnet die Gränze, welcher $\mathfrak{y}$ sich nähert, wenn Q sich dem Unendlichen nähert, durch $\mathfrak{y}'$; so ergiebt sich auf der Stelle, dass

$$61)\quad \mathfrak{y}' = \pm \frac{b^2 - e^2}{2b}$$

ist.

Wenn der Punkt (PQ) in keiner der beiden Axen der Ellipse liegt, also keine der beiden Coordinaten X, Y verschwindet, so erhellet aus den Gleichungen 49), dass die Grössen P, Q sich beide gleichzeitig dem Unendlichen nähern. Bringt man nun die Gleichungen 52) auf die Form

$$\mathfrak{x} = -\frac{\frac{2e^2 X^3}{P} - (a^4 + e^2 X^2)}{2a^4 - \frac{(a^4 + e^2 X^2)\, X}{P}} X,$$

$$\mathfrak{y} = \frac{\frac{2e^2 Y^3}{Q} + (b^4 - e^2 Y^2)}{2b^4 - \frac{(b^4 - e^2 Y^2)\, Y}{Q}} Y;$$

und bezeichnet die Gränzen, denen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ sich nähern, wenn der Punkt $(P\,Q)$ sich in der dem Punkt $(X\,Y)$ entsprechenden Normale der Ellipse von dem Punkte $(X\,Y)$ in's Unendliche entfernt, durch $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; so erhält man auf der Stelle

$$62)\quad \mathfrak{X}' = \frac{a^4 + e^2 X^2}{2a^4} X,\quad \mathfrak{Y}' = \frac{b^4 - e^2 Y^2}{2b^4} Y.$$

Wenn wir in den Gleichungen 51) wieder für

$$P,\ Q;\quad X,\ Y;\quad \mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}$$

respective

$$P-a,\ Q;\quad X-a,\ Y;\quad \mathfrak{X}-a,\ \mathfrak{Y}$$

setzen; so erhalten wir

$$\mathfrak{X} - X = -\frac{(X-a)\left\{a^4 - e^2(X-a)^2\right\}(P-X)}{(X-a)\left\{a^4 - e^2(X-a)^2\right\} + 2a^4(P-X)},$$

$$\mathfrak{Y} - Y = -\frac{Y(b^4 + e^2 Y^2)(Q-Y)}{Y(b^4 + e^2 Y^2) + 2b^4(Q-Y)};$$

und folglich, weil

$$b^2 = \tfrac{1}{2}ap,\quad e^2 = a^2 - b^2 = a(a - \tfrac{1}{2}p)$$

ist:

$$63)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} - X = -\dfrac{(X-a)\left\{a^3 - (a-\frac{1}{2}p)(X-a)^2\right\}(P-X)}{(X-a)\left\{a^3 - (a-\frac{1}{2}p)(X-a)^2\right\} + 2a^3(P-X)}, \\ \mathfrak{Y} - Y = -\dfrac{Y\left\{\frac{1}{4}ap^2 + (a-\frac{1}{2}p)Y^2\right\}(Q-Y)}{Y\left\{\frac{1}{4}ap^2 + (a-\frac{1}{2}p)Y^2\right\} + \frac{1}{2}ap^2(Q-Y)}. \end{cases}$$

Weil nun aber, wie man leicht findet:

$$a^3 - (a-\tfrac{1}{2}p)(X-a)^2 = \tfrac{1}{2}a^2p + a(2a-p)X - (a-\tfrac{1}{2}p)X^2$$

ist; so ist

$$64)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} - X = -\dfrac{(X-a)\left\{\frac{1}{2}a^2p + a(2a-p)X - (a-\frac{1}{2}p)X^2\right\}(P-X)}{(X-a)\left\{\frac{1}{2}a^2p + a(2a-p)X - (a-\frac{1}{2}p)X^2\right\} + 2a^3(P-X)}, \\ \mathfrak{Y} - Y = -\dfrac{Y\left\{\frac{1}{4}ap^2 + (a-\frac{1}{2}p)Y^2\right\}(Q-Y)}{Y\left\{\frac{1}{4}ap^2 + (a-\frac{1}{2}p)Y^2\right\} + \frac{1}{2}ap^2(Q-Y)}. \end{cases}$$

Dividirt man jetzt Zähler und Nenner des ersten Bruchs durch a^3, Zähler und Nenner des zweiten Bruchs durch a, so erhält man

$$\mathfrak{x}-X=-\frac{\left(\frac{X}{a}-1\right)\left\{\frac{1}{2}p+\left(2-\frac{p}{a}\right)X-\left(1-\frac{p}{2a}\right)\frac{X}{a}X\right\}(P-X)}{\left(\frac{X}{a}-1\right)\left\{\frac{1}{2}p+\left(2-\frac{p}{a}\right)X-\left(1-\frac{p}{2a}\right)\frac{X}{a}X\right\}+2(P-X)},$$

$$\mathfrak{y}-Y=-\frac{Y\left\{\frac{1}{4}p^2+\left(1-\frac{p}{2a}\right)Y^2\right\}(Q-Y)}{Y\left\{\frac{1}{4}p^2+\left(1-\frac{p}{2a}\right)Y^2\right\}+\frac{1}{2}p^2(Q-Y)}.$$

Daher ist für die Parabel, d. h. wenn a unendlich wird:

$$65)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-X=-\dfrac{(\frac{1}{4}p+X)(P-X)}{(\frac{1}{4}p+X)-(P-X)}, \\ \mathfrak{y}-Y=-\dfrac{Y(\frac{1}{4}p^2+Y^2)(Q-Y)}{Y(\frac{1}{4}p^2+Y^2)+\frac{1}{2}p^2(Q-Y)}; \end{cases}$$

oder

$$66)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-X=-\dfrac{(\frac{1}{4}p+X)(P-X)}{(\frac{1}{4}p+X)-(P-X)}, \\ \mathfrak{y}-Y=-\dfrac{Y(\frac{1}{4}p+X)(Q-Y)}{Y(\frac{1}{4}p+X)+\frac{1}{2}p(Q-Y)}; \end{cases}$$

oder auch

$$67)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-X=-\dfrac{(\frac{1}{4}p+X)(P-X)}{(\frac{1}{4}p+X)-(P-X)}, \\ \mathfrak{y}-Y=-\dfrac{X(\frac{1}{4}p+X)(Q-Y)}{X(\frac{1}{4}p+X)+\frac{1}{2}Y(Q-Y)}. \end{cases}$$

Wenn der Punkt (PQ) in der Axe der Parabel liegt, so ist im Vorhergehenden offenbar $X=0$, $Y=0$ zu setzen, und aus der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich leicht:

$$68)\quad \mathfrak{x}=-\frac{pP}{p-4P}.$$

Auch liegt es in der Natur der Sache, dass in diesem Falle $\mathfrak{Y} = 0$ ist. Bringt man die Gleichung 68) auf die Form

$$\mathfrak{X} = -\frac{p}{\frac{p}{P} - 4},$$

und bezeichnet die Gränze, welcher $\mathfrak{X}$ sich nähert, wenn P sich dem Unendlichen nähert, durch $\mathfrak{X}'$, so ist offenbar

$$69) \quad \mathfrak{X}' = \tfrac{1}{4} p.$$

Setzt man in der Gleichung 16) der dem Punkte $(X\,Y)$ entsprechenden Normale der Ellipse für

$$x,\ y;\quad X,\ Y$$

respective

$$x - a,\ y;\quad X - a,\ Y$$

und $b^2 = \frac{1}{2} a p$; so wird dieselbe

$$y - Y = \frac{2aY}{p(X-a)}\,(x - X)$$

oder

$$y - Y = \frac{2Y}{p\left(\frac{X}{a} - 1\right)}\,(x - X).$$

Also ist

$$70) \quad y - Y = -\frac{2Y}{p}\,(x - X)$$

die Gleichung der dem Punkte $(X\,Y)$ entsprechenden Normale der Parabel.

Weil nun nach der Voraussetzung der Punkt $(P\,Q)$ in dieser Normale liegt, so ist

$$Q - Y = -\frac{2Y}{p}\,(P - X),$$

woraus man sieht, dass, wenn der Punkt $(P\,Q)$ nicht in der Axe der Parabel liegt, also nicht $Y = 0$ ist, die Coordinaten P, Q sich immer gleichzeitig dem Unendlichen nähern. Bringt man also die Gleichungen 66) auf die Form

$$\mathfrak{x} - X = -\frac{\frac{1}{4}p + X}{\frac{\frac{1}{4}p + X}{P - X} - 1},$$

$$\mathfrak{y} - Y = -\frac{Y(\frac{1}{4}p + X)}{\frac{Y(\frac{1}{4}p + X)}{Q - Y} + \frac{1}{2}p};$$

und bezeichnet die Gränzen, denen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sich nähern, wenn P, Q sich dem Unendlichen nähern, d. h. wenn der Punkt $(P\,Q)$ sich in der dem Punkte (XY) entsprechenden Normale der Parabel von dem Punkte $(X\,Y)$ in's Unendliche entfernt, durch $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$; so erhellet auf der Stelle, dass

$$71)\quad \mathfrak{x}' - X = \tfrac{1}{4}p + X \quad \mathfrak{y}' - Y = -\frac{2Y(\frac{1}{4}p + X)}{p};$$

also

$$72)\quad \mathfrak{x}' = \tfrac{1}{4}p + 2X,\ \mathfrak{y}' = \frac{2(\frac{1}{4}p - X)\,Y}{p}$$

ist.

Aus 71) ergiebt sich leicht

$$73)\quad (\mathfrak{x}' - X)^2 + (\mathfrak{y}' - Y)^2 = \frac{4(\frac{1}{4}p + X)^3}{p}.$$

Aus den beiden Gleichungen 72) erhält man

$$X = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}' - \tfrac{1}{4}p),\ Y = \frac{p\,\mathfrak{y}'}{2(\frac{1}{4}p - X)};$$

also, wenn man in die zweite Gleichung den Werth von X aus der ersten Gleichung einführt:

$$X = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}' - \tfrac{1}{4}p),\ Y = \frac{p\,\mathfrak{y}'}{\frac{1}{2}p - (\mathfrak{x}' - \frac{1}{4}p)}.$$

Weil nun $Y^2 = pX$ ist, so erhält man die Gleichung

$$74)\quad p\,\mathfrak{y}'^2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}' - \tfrac{1}{4}p)\left\{\tfrac{1}{2}p - (\mathfrak{x}' - \tfrac{1}{4}p)\right\}^2.$$

Nimmt man den Brennpunkt der Parabel als Anfang der Coordinaten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ an, so muss man in dieser Gleichung $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ für $\mathfrak{x}' - \frac{1}{4}p$, $\mathfrak{y}'$ setzen, wodurch dieselbe folgende Gestalt erhält:

$$75)\quad p\,\mathfrak{y}'^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}'(\tfrac{1}{2}p - \mathfrak{x}')^2$$

oder

$$76)\quad 8p\,\mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{x}'(p - 2\mathfrak{x}')^2.$$

Denkt man sich also parallel mit allen Normalen der Parabel und unendlich nahe bei denselben Strahlen auf die Parabel fallend, so ist dies die Gleichung der Curve, in welcher die sämmtlichen entstehenden Bilder liegen. Dass diese Curve jederzeit durch den Brennpunkt der Parabel geht, folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar.

Zum Schluss wollen wir nun auch noch für die Parabel die allgemeine Gleichung der geraden Linie, in welcher der reflectirte Strahl liegt, entwickeln. Setzen wir zu dem Ende in der Gleichung 35) für

$$x,\ y;\ P,\ Q;\ X,\ Y$$

respective

$$x-a,\ y;\ P-a,\ Q;\ X-a,\ Y;$$

so erhalten wir

$$y-Y=\frac{2a^2b^2(X-a)Y(P-X)+\left\{a^4Y^2-b^4(X-a)^2\right\}(Q-Y)}{2a^2b^2(X-a)Y(Q-Y)-\left\{a^4Y^2-b^4(X-a)^2\right\}(P-X)}(x-X),$$

und folglich, weil

$$b^2=\tfrac{1}{2}ap,\ b^4=\tfrac{1}{4}a^2p^2$$

ist:

$$77)\ y-Y=\frac{ap(X-a)Y(P-X)+\left\{a^2Y^2-\tfrac{1}{4}p^2(X-a)^2\right\}(Q-Y)}{ap(X-a)Y(Q-Y)-\left\{a^2Y^2-\tfrac{1}{4}p^2(X-a)^2\right\}(P-X)}(x-X);$$

also, wenn man im Zähler und Nenner mit a^2 dividirt:

$$y-Y=\frac{p\left(\frac{X}{a}-1\right)Y(P-X)+\left\{Y^2-\tfrac{1}{4}p^2\left(\frac{X}{a}-1\right)^2\right\}(Q-Y)}{p\left(\frac{X}{a}-1\right)Y(Q-Y)-\left\{Y^2-\tfrac{1}{4}p^2\left(\frac{X}{a}-1\right)^2\right\}(P-X)}(x-Y).$$

Daher ist für die Parabel:

$$78)\ y-Y=\frac{pY(P-X)-(Y^2-\tfrac{1}{4}p^2)(Q-Y)}{pY(Q-Y)+(Y^2-\tfrac{1}{4}p^2)(P-X)}(x-X)$$

oder

$$79)\ y-Y=\frac{Y(P-X)-(X-\tfrac{1}{4}p)(Q-Y)}{Y(Q-Y)+(X-\tfrac{1}{4}p)(P-X)}(x-X),$$

oder

$$80)\quad y - Y = \frac{Y(P - \frac{1}{4}p) - Q(X - \frac{1}{4}p)}{Y(Q - Y) + (P - X)(X - \frac{1}{4}p)}(x - X).$$

Für $P = \frac{1}{4}p$, $Q = 0$ wird $y - Y = 0$, also $y = Y$, d. h. die gerade Linie, in welcher der reflectirte Strahl liegt, ist der Axe der Parabel parallel, welches eine bekannte Eigenschaft dieses Kegelschnitts ist.

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

Druckfehler.

S. 50 Z. 5 Statt $\frac{E}{E}$ s. m. $\frac{E}{E\ E^{(1)}}$.

— 81 — 9 Statt p^1 s. m. $p^{(1)}$; auch ist im Nenner des Ausdrucks von $q^{(1)} - q$ der eine Exponent 2 von q verschoben; es muss q^2 s att ^2q heissen.

— 116 In dem letzten Kettenbruche auf dieser Seite s. m. $\mathfrak{N}_{i\ -3}$ statt $\mathfrak{N}^{i\ -3}$.

— 117 In dem ersten Kettenbruche auf dieser Seite s. m. $\mathfrak{M}_{i\ -2}$ statt $\mathfrak{M}^{i\ -2}$.

— 125 — 4 v. u. Statt $(-1)^{i+1-1}$ s. m. $(-1)^{i+l-1}$

— 219 — 10 Statt $\sqrt{\left(1+\frac{Y}{X}\right)^2}$ s. m. $\sqrt{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2}$.